Physikalisches Grundpraktikum Teil 1 – WS 2010/2011

Grundlagen der Statistik und Fehlerrechnung

Stefan Diehl

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

28.02.2011 12.30 – 13.30 HS I

01.03.2011 12.30 – 13.30 CHEG18

Inhalt

- Grundbegriffe der Statistik
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Fehlerfortpflanzung
- Graphische Darstellung und Analyse von Messwerten
- Fehlerrechnung bei graphischen Darstellungen

Warum beschäftigen wir uns mit Statistik?

Alle Messgrößen sind mit Fehlern behaftet!

Fehler ermöglicht Aussage über Qualität des gemessenen Wertes!

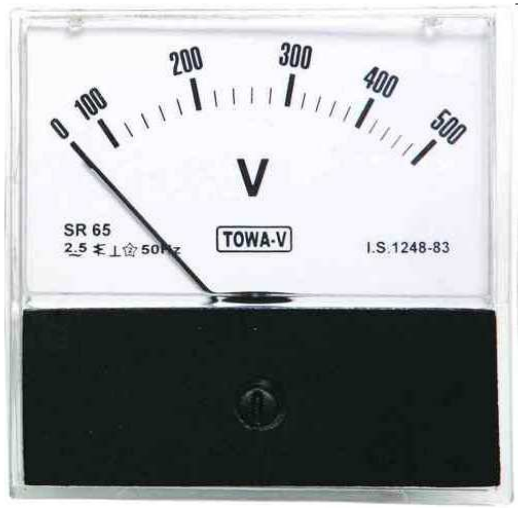


Bild: http://product-image.esuppliersindia.com

Verhindert Über- oder Unterschätzung des Ergebnises

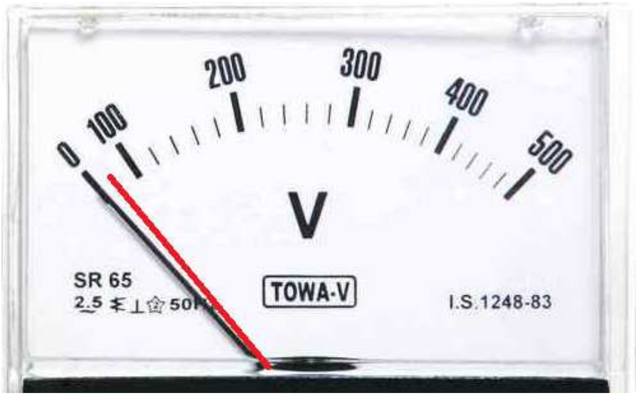
Grundlage für kritisches hinterfragen des Messwertes

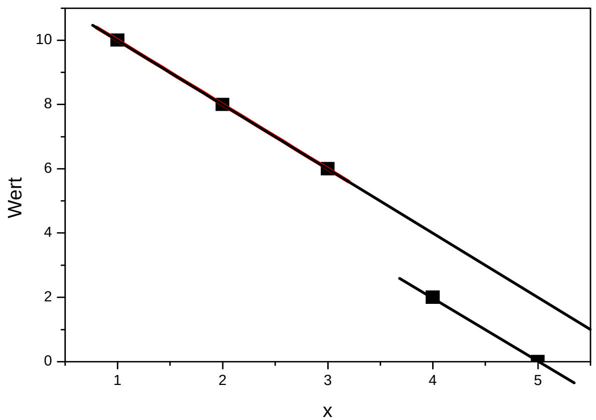
2 Arten von Fehlern

Systematischer Fehler:

Ursache: falsch geeichte Messgeräte, unreine Substanzen, mangelnde Wärmeisolation, Näherungsformeln außerhalb des Gültigkeitsbereichs

Beispiele:





Beeinflusst Ergebnis stets in die gleiche Richtung - prinzipiell vermeidbar

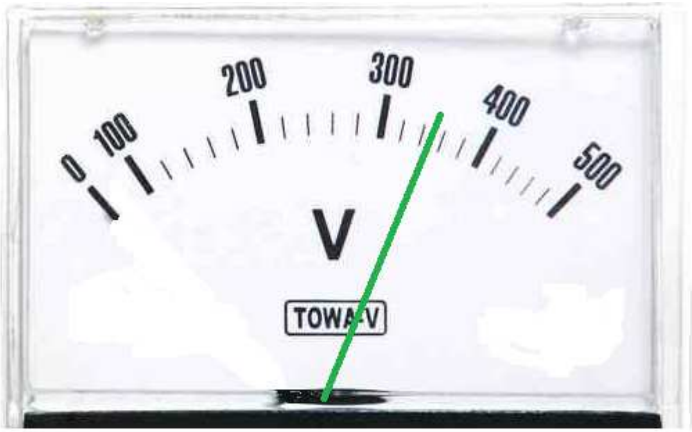
Immer experimentspezifisch - muss im Einzelfall abgeschätzt werden

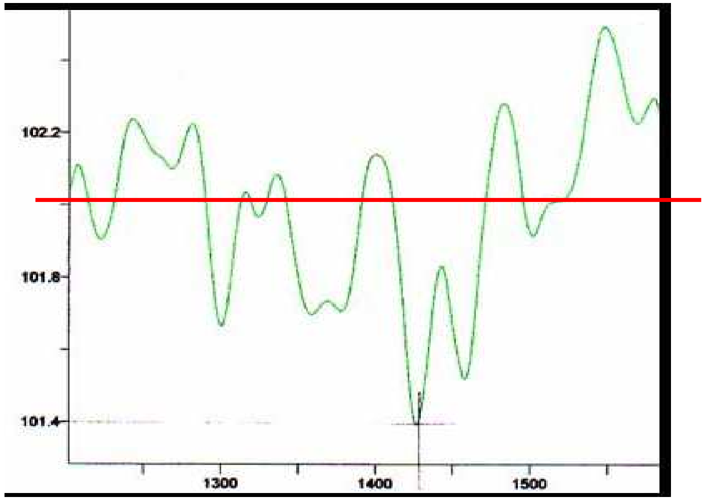
2 Arten von Fehlern

Statistischer Fehler:

Tritt zusätzlich zum systematischen Fehler auf !

Ursache: Einstell- und Ablesefehler,
Äußere Einflüsse (Temperatur-, Netzspannungsschwankungen),
Statistische Natur von Prozessen (z.B. radioaktiver Zerfall)



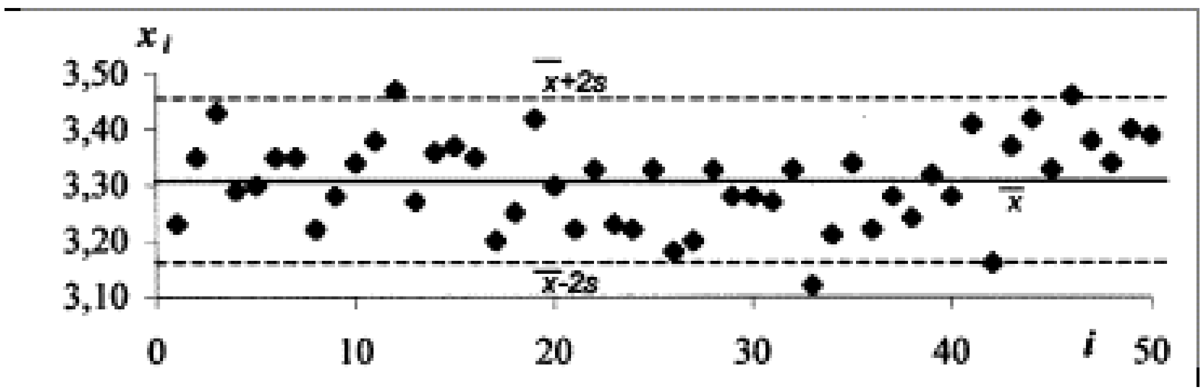


2 Arten von Fehlern

Beeinflusst Ergebnis in beide Richtungen

unvermeidbar,

kann jedoch durch wiederholte Messung reduziert werden



Mittelwert?

Schwankung?

Grundbegriffe der Statistik

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Definition: Versuch

Experiment mit exakt festgelegten Vorschriften und Bedingungen (Ergebnis ist reproduzierbar)

Relative Häufigkeit:

$$h_r = \frac{H_r}{N}$$

Absolute Häufigkeit von Ereignis r

Anzahl der Durchführungen

Wahrscheinlichkeit:

$$P_r = \lim_{N \to \infty} \frac{H_r}{N}$$

Rechenregeln

$$P(r \text{ oder } s) = P_r + P_s$$

$$P(r \text{ und } s) = P_r \cdot P_s$$

Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 1 oder eine 5 zu würfeln?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim zweimaligem werfen eines Würfels erst eine 1 und dann eine 5 zu würfeln?

P (1 oder 5) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 → 33,3 %

P (1 und 5) = 1/6 * 1/6 = 1/36 → 2,8 %

Mittelwert und Erwartungswert

Arithmetischer Mittelwert: $$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{n} H_r x_r = \sum_{r=1}^{n} h_r x_r$$

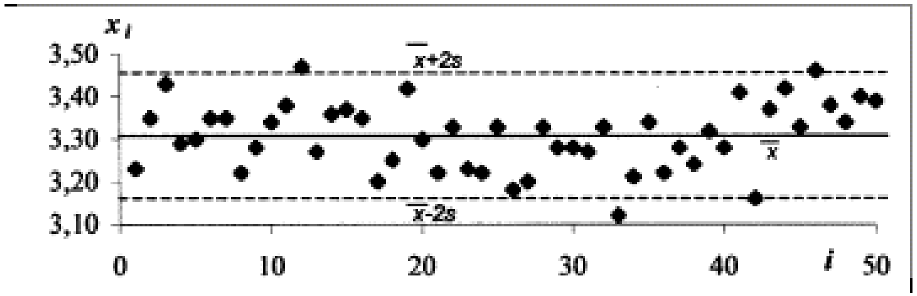
$$h_r = \frac{H_r}{N}$$

Erwartungswert: $$< x >= \lim_{N\to\infty} \overline{x} = \sum_{r=1}^{n} P_r x_r$$

$$P_r = \lim_{N\to\infty} \frac{H_r}{N}$$

Varianz und Standardabweichung

Varianz: $$V(x) = \sum_{r=1}^{n} P_r (x_r - <x>)^2$$



Maß für die Streuung der Einzelwerte um den Erwartungswert

Standardabweichung: $$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Statistische Messfehler

Ab jetzt: endliche Messreihe

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{n} H_r x_r$$

Ziel: Aus endlich vielen Messwerten soll auf den wahren Wert der Messgröße geschlossen werden

Mittelwert aus N Messwerten:
$(x_1, x_2, \cdots, x_N)$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Mehrmalige Wiederholung der gesamten Messreihe liefert mehr oder weniger stark schwankende Mittelwerte

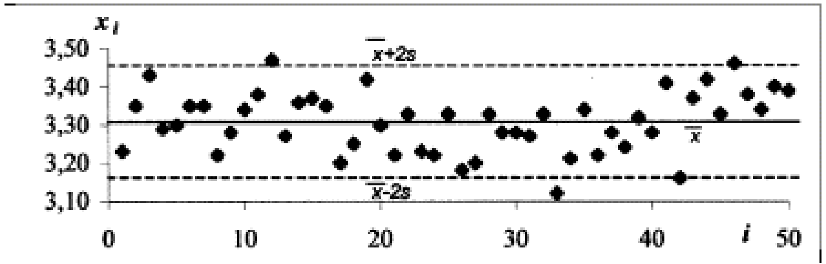
➔ Betrachte Mittelwert selbst als Messwert mit gleichem Erwartungswert wie die Einzelmesswerte:

$$< \overline{x} > = < x >$$

Die mittlere quadratische Abweichung

Verwende Mittelwert als Näherungswert für den gesuchten Erwartungswert:

$$< x > \approx \overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$



Mittlere quadratische Abweichung:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$

$$V(x) = \sum_{r=1}^{n} P_r (x_r - < x >)^2$$

Zusammenhang zu Varianz und Standardabweichung

Wie hängt die mittlere quadratische Abweichung mit der Varianz zusammen?

$$< s^2 > = \frac{N-1}{N} V(x)$$

Varianz ist Grenzwert für unendlich viele Messungen!

Umstellen und einsetzen von s² liefert:

$$V(x) = \sigma^2(x) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

Standardabweichung: $$\boxed{\sigma(x) \approx \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}}$$

Standardabweichung des Mittelwertes

Bisher: Eine Messreihe mit endlich vielen (N) Messwerten

Jetzt: Messwerte sind Mittelwerte mehrerer Messreihen mit Umfang N

Fragestellung: Wie groß ist die Schwankung des Mittelwertes zwischen den verschiedenen Messreihen?

$$V(x) = \sum_{r=1}^{n} P_r (x_r - \langle x \rangle)^2 \qquad \overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad \Rightarrow \quad V(\overline{x}) = \frac{1}{N} V(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(x) \approx \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}}$$

Wichtige Formeln:

Mittelwert: $$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$ (Bestwert für ein Ergebnis)

Standardabweichung der Einzelmessung: $$\sigma(x) \approx \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$ (Streuung der Einzelwerte)

Standardabweichung des Mittelwertes: $$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(x) \approx \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

(Streuung der Mittelwerte bei identischen Messreihen mit Umfang N)

Verständnisfragen:

1. Was ist größer, der mittlere Fehler der Einzelmessung oder der mittlere Fehler des Mittelwertes? $$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(x)$$

2. Was passiert mit dem Fehler des Mittelwertes bei unendlich vielen Messwerten? $$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(x) \rightarrow 0$$

3. Bei welchen Messwerten ist die Standardabweichung größer?
   a) 5 ; 6 ; 7   b) 4 ; 6 ; 8

   a) + b) Mittelwert = 6 ; Standartabweichung = a) 1   b) 2

4. Was ist der Unterschied zwischen Varianz und mittlerer quadratischer Abweichung? $$V(x) = \sum_{r=1}^{n} P_r(x_r - < x >)^2 \qquad s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

5. Wie nennt man den Mittelwert einer Messreihe mit unendlich vielen Werten?

   Erwartungswert

Wahrscheinlichkeits-verteilungen

Die Binomialverteilung

Beispiel: System aus n Würfeln

Wahrscheinlichkeit p, dass bei einem der Würfel eine bestimmte Zahl gewürfelt wird ist 1/6

Gegenwahrscheinlichkeit: q = 1 – p = 5/6

$\boxed{p + q = 1}$

Betrachte nun: Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl bei x von n Würfeln auftritt und bei den übrigen nicht.

$$P(r \text{ und } s) = P_r \cdot P_s$$

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \; \ldots \; \cdot p}_{x \text{ Faktoren}} \cdot \; \underbrace{q \cdot q \cdot \; \ldots \; \cdot q}_{(n-x) \text{ Faktoren}} \; = p^x q^{n-x}$$

Die Binomialverteilung

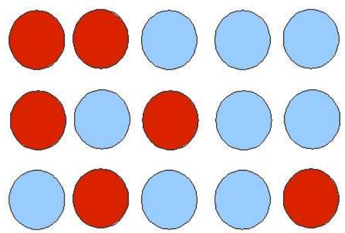
Möglichkeiten, x Würfel aus den n Würfeln auszuwählen (Anordnung der Würfel):

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Zusammen:

$$\boxed{P_{n,p}(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{(n-x)}}$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von 5 Würfeln genau 2 mal die 3 fällt.



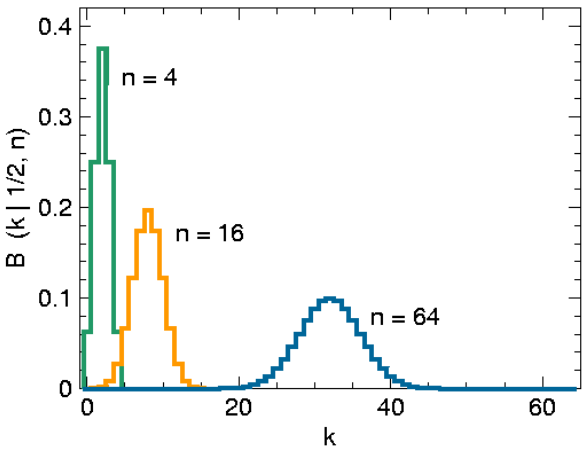
Gegeben: n=5, x=2, p=1/6, q =1–p=5/6

$$P_{5,1/6} = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16 \;\rightarrow\; 16\%$$

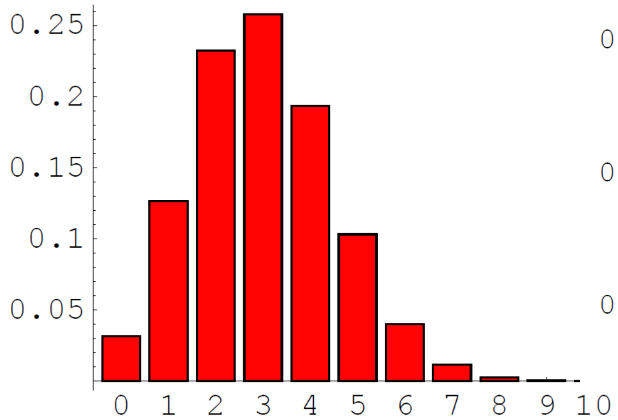
Die Binomialverteilung
Erwartungswert und Standartabweichung

$$< x >= \sum_{x=0}^{n} P(x)x = np$$

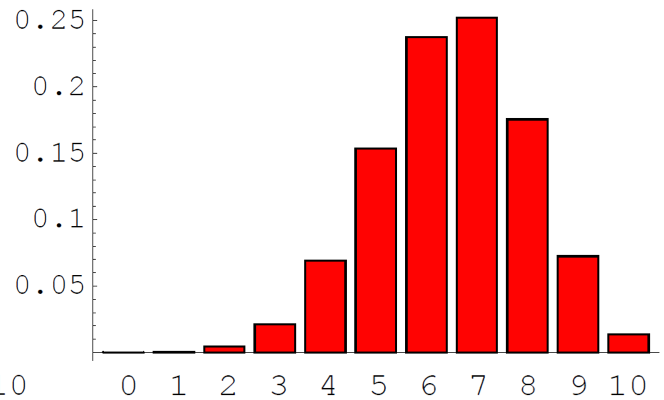
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{npq}$$



p = q = 0.5



p = ¼ , n =12



p = 0.65, n =10

Aufgaben:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter Zwillingen beide Kinder männlich sind wird auf 32 % geschätzt. Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 6 Zwillingspaaren die Hälfte der Kinder männlich ist?

   Gegeben: p = 0.32 , n = 6 , x = 3

   $$P(X=3)=\binom{6}{3}p^3(1-p)^{6-3}=0.206\ldots$$

2. Ein Expertenteam, das regelmäßig mit Prognosen zu wirtschaftlichen Entwicklungen beauftragt wird, hat eine Trefferquote von 65%. In nächster Zeit sind 10 neue Gutachten zu erstellen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Experten dabei eine Trefferquote von mindestens 80 % erzielen?

   Gegeben: p = 0.65 , n=10

   Summenregel liefert: $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.26\ldots$

Näherungsformeln
- Poissonverteilung -

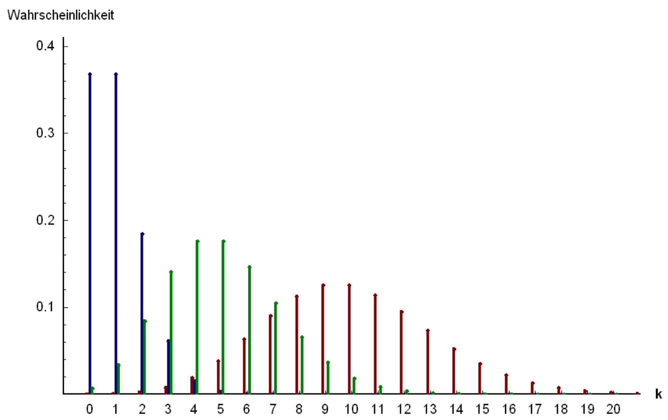
Problem: Berechnung von Fakultäten bei großen Zahlen schwierig

Taschenrechner maximal bis 69!

Lösung: Näherungsformeln

1. Poissonverteilung: (n groß, np klein ~1)

$$P(x) = \frac{a^x}{x!}\, e^{-a} \qquad \text{mit} \qquad a = np$$



Erwartungswert / Standardabweichung: $p << 1 \rightarrow q = 1 - p \sim 1$

$$< x >= V(x) = \sigma^2(x) = np$$

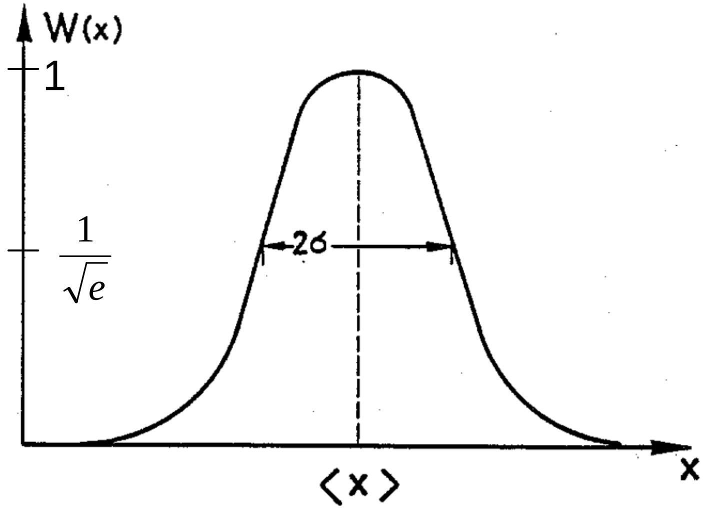
Näherungsformeln - Gaußverteilung

2. Normal- (Gauss-) Verteilung: *(n groß und np groß → p ~ 0,5)*

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)}\, e^{-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma^2(x)}}$$

$$<x>= np$$

$$V(x) = \sigma^2(x) = npq$$



Konfidenzintervalle:

$x =< x > \pm\sigma$ → 68,3 %

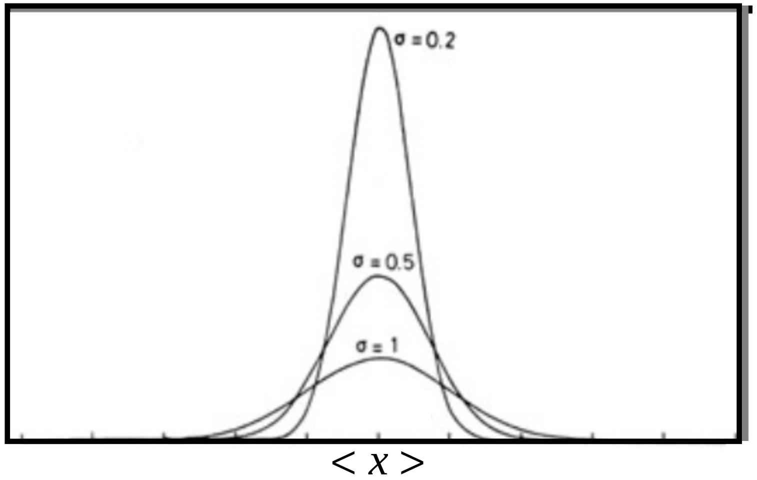
$x =< x > \pm 2\sigma$ → 95,5 %

Symmetrisch zu <x>

σ ~ Breite der Verteilung

Näherungsformeln - Gaußverteilung

Einfluss der Standardabweichung auf die Breite:



$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)}\, e^{-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma^2(x)}}$$

Praxis (z.B. Fitten): Unnormierte Gaußverteilung

$$G(x) = \frac{H}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-<x>)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

Wichtige Formeln:

Binomialverteilung: $$P_{n,p}(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{(n-x)}$$

$$< x >= np \qquad V(x) = \sigma^2(x) = npq$$

Poissonverteilung: $$P(x) = \frac{a^x}{x!}\, e^{-a}$$ (n groß, np klein ~1)

Gaußverteilung: $$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)}\, e^{-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma^2(x)}}$$

(n groß und np groß → p ~ 0,5)

Aufgaben:

1. Von 100 Personen ist durchschnittlich eine Person farbenblind.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei farbenblinde Personen?

   Gegeben: p = 1/100 ; n = 100 → n*p = 1 → Poisson

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} - \frac{1^1}{1!}e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0{,}264\ldots \qquad \rightarrow 26{,}4\%$$

2. Ein Würfel trägt 3 Einser, 2 Zweier und eine Vier.
   Er wird 1000 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 450 Einser?

   Gegeben: p= 3/6 = ½ ; n = 1000 ; x = 450 → n*p = 500 → Gauss

$$<x> = n \cdot p = 500 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{250} = 5 \cdot \sqrt{10}$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5 \cdot \sqrt{10}} \cdot e^{-\frac{(450-500)^2}{2 \cdot (5 \cdot \sqrt{10})^2}} \approx 1{,}70 \cdot 10^{-4} \qquad \rightarrow 0{,}017\%$$

Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzung

Experiment: Bestimme kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Sowohl die Masse **m** als auch die Geschwindigkeit **v** haben einen Fehler

Allgemeiner Fall: Fehler liegen als Standardabweichung $x = \overline{x} \pm \sigma(\overline{x})$ der Messgröße vor

Ergebnis ist Funktion mehrerer gemessener Größen: $f = f(x, y, z, ...)$

Gesamtfehler:

$$\boxed{\sigma(\overline{f}) = \Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)^2 + ...}}$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Beispiel: Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\sigma(\overline{f}) = \Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)^2 + ...}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$:= partielle Ableitung	$\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{df}{dx}$	Alle übrigen Variablen werden konstant gehalten (unabhängig davon, ob diese implizit von x abhängen)

Konkret gilt: $x = m \qquad y = v$

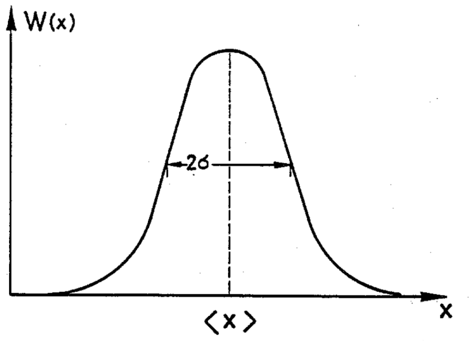
Part. Ableitungen: $\frac{\partial E_{Kin}}{\partial x} = \frac{\partial E_{Kin}}{\partial m} = \frac{1}{2} \cdot v^2 \qquad \frac{\partial E_{Kin}}{\partial y} = \frac{\partial E_{Kin}}{\partial v} = m \cdot v$

Zusammen:

$$\sigma(E_{Kin}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \Delta m\right)^2 + (m \cdot v \cdot \Delta v)^2}$$

Statistisch verteilte Messwerte

Annahme: Einzelmessungen Gaußförmig um Erwartungswert verteilt



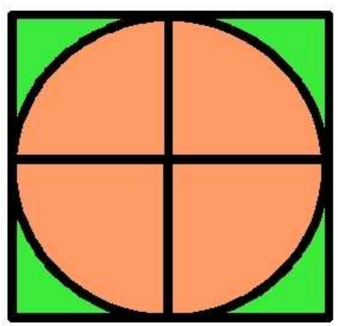
Es gilt: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ sowie $< x >= n \cdot p$

$\longrightarrow \quad \sigma = \sqrt{< x > \cdot q}$ mit $q = 1 - p \approx 0{,}5$; $< x >= N >> q$

$$\boxed{\sigma \approx \sqrt{N}}$$

Beispiel: Kreisflächenberechnung mit Montecarlomethoden

Werfe Dartpfeile auf Wand und zähle, wie viele in einen Kreis treffen.



$$\frac{N_{im\ Kreis}}{N_{Ges}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2r \cdot 2r} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{4 \cdot N_{im\ Kreis}}{N_{Ges}}$$

$$\Delta N_{im\ Kreis} = \sqrt{N_{im\ Kreis}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\pi = \sqrt{\left(\frac{4}{N_{Ges}}\right)^2 \cdot \Delta N^2_{im\ Kreis}} = \frac{4 \cdot \sqrt{N_{im\ Kreis}}}{N_{Ges}}$$

Größtfehler (Maximalfehler)

Fall: Messwert wurde nur einmal gemessen

⇒ Standartabweichung nicht bekannt!

⇒ Fehler muss nach oben abgeschätzt werden (Größtfehler)

Zu Berücksichtigen: Ablesegenauigkeit der Skala
+ Experimentelle Gegebenheiten

Im Praktikum: Abschätzung des Größtfehlers durch …
- Aufnahme einer Messreihe (3-5 Messwerte)
- Bestimmung des Mittelwertes
- Maximalfehler := größte Abweichung eines Messwertes vom Mittelwert

Größtfehler (Maximalfehler)

Für den Gesamtfehler gilt (Folgerung des Taylorschen Satzes):

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \cdots}$$

Bedingung: $\Delta x << x \;,\; \Delta y << y \quad \ldots$

Der Betrag ist hier wichtig, da sich die Fehler sonst evtl. auslöschen !!!

Beispiel: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ $\qquad \frac{\partial E_{Kin}}{\partial x} = \frac{\partial E_{Kin}}{\partial m} = \frac{1}{2}\cdot v^2 \qquad \frac{\partial E_{Kin}}{\partial y} = \frac{\partial E_{Kin}}{\partial v} = m\cdot v$

$$\Delta E_{Kin} = \left|\frac{1}{2}v^2\right|\cdot\Delta m + |m\cdot v|\cdot\Delta v$$

Der relative Fehler

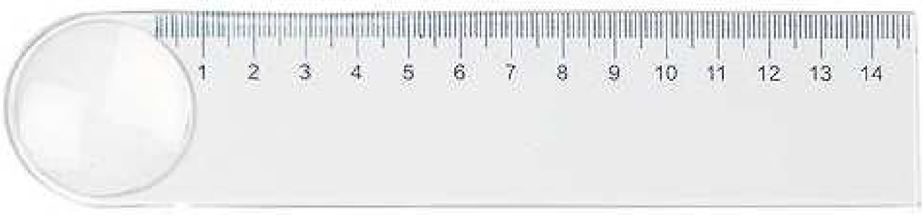
Beispiel: $f = A \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c \ldots$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{A \cdot \left(\left| a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot z^c \cdot \ldots \right| \cdot \Delta x + \left| b \cdot y^{b-1} \cdot x^a \cdot z^c \cdot \ldots \right| \cdot \Delta y + \ldots \right)}{A \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot \ldots}$$

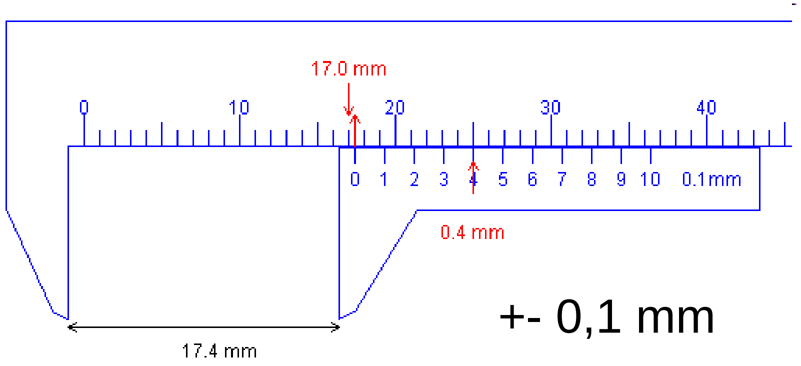
$$\frac{\Delta f}{f} = |a| \frac{\Delta x}{x} + |b| \frac{\Delta y}{y} + |c| \frac{\Delta z}{z} + \cdots$$

Liefert Ergebnis als Bruchteil von 1 → Angabe in %: $\cdot 100\%$

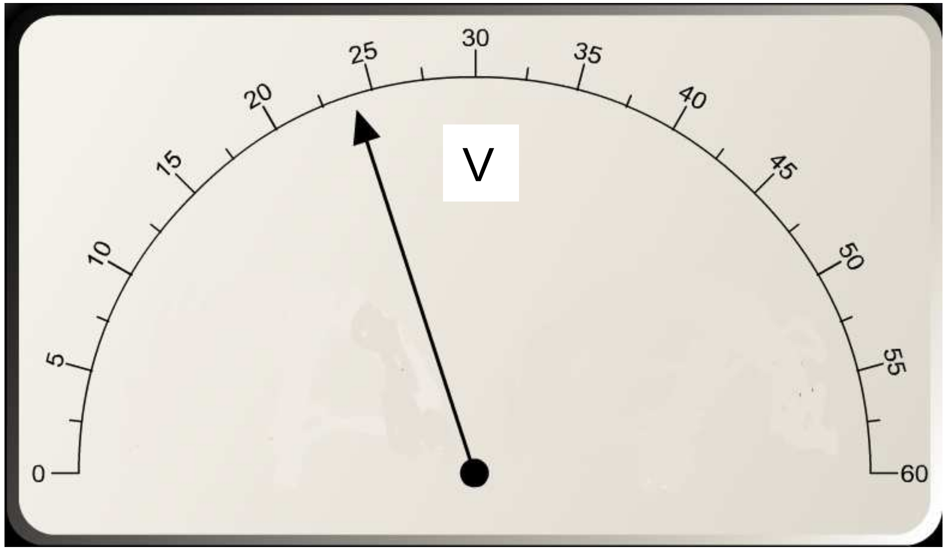
Exkurs: Ablesen von Messwerten und Fehlerangabe



+- 1 mm



+- 0,1 mm



+- 2,5 V

Wichtige Formeln:

Gaußsche – Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma(\overline{f}) = \Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)^2 + ...}$$

Maximalfehler:

$$\Delta f = |\frac{\partial f}{\partial x}|\Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}|\Delta y + \cdots$$

Wichtig:

Angabe eines Messwertes ohne Fehler ist sinnlos !!!

Angabe des Messwertes mit einer Genauigkeit,
die besser ist als der Fehler, ist sinnlos !!!

Aufgaben:

1. Der Taschenrechner liefert die folgenden Werte für das Ergebnis und den Fehler. Wie wird das Ergebnis korrekt notiert?

   Wert: 3,4563267 m ; Fehler: 0,00032945 m

   $$Ergebnis = (3{,}45633 \pm 0{,}00033)m$$

2. Im Internet steht, der Eiffelturm in Paris sei 300.51 m hoch. Was ist von der Genauigkeit dieser Angabe zu halten? (Stichwort: Wärmeausdehnung)

   Wärmeausdehnungskoeffizient: 1,17 cm/K → 3,52 m bei 300.51 m Höhe

3. Ein Würfel habe Kantenlänge (18.2 ± 0.1) mm und Masse (51.9 ± 0.1) g. Berechnen Sie die Dichte des Materials inklusive absoluter Fehlerschranke.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L^3} = \frac{51{,}9g}{(18{,}2mm)^3} = 8{,}61 \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$$

$$\Delta\rho = \left|\frac{1}{L^3}\right| \cdot \Delta m + \left|-3 \cdot \frac{m}{L^4}\right| \cdot \Delta L = \frac{0{,}1g}{(18{,}2mm)^3} + 3 \cdot \frac{51{,}9g}{(18{,}2mm)^4} \cdot 0{,}1mm = 1{,}58 \cdot 10^{-4} \frac{g}{mm^3}$$

$$\rho = (8{,}61 \pm 0{,}16) \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$$

Aufgaben – Teil 2:

4. Eine Strecke von 1.80 km werde in 0.47 h zurückgelegt. Beide Größen weisen eine relative Fehlerschranke von 5 % auf. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit mit relativer und absoluter Fehlerschranke.

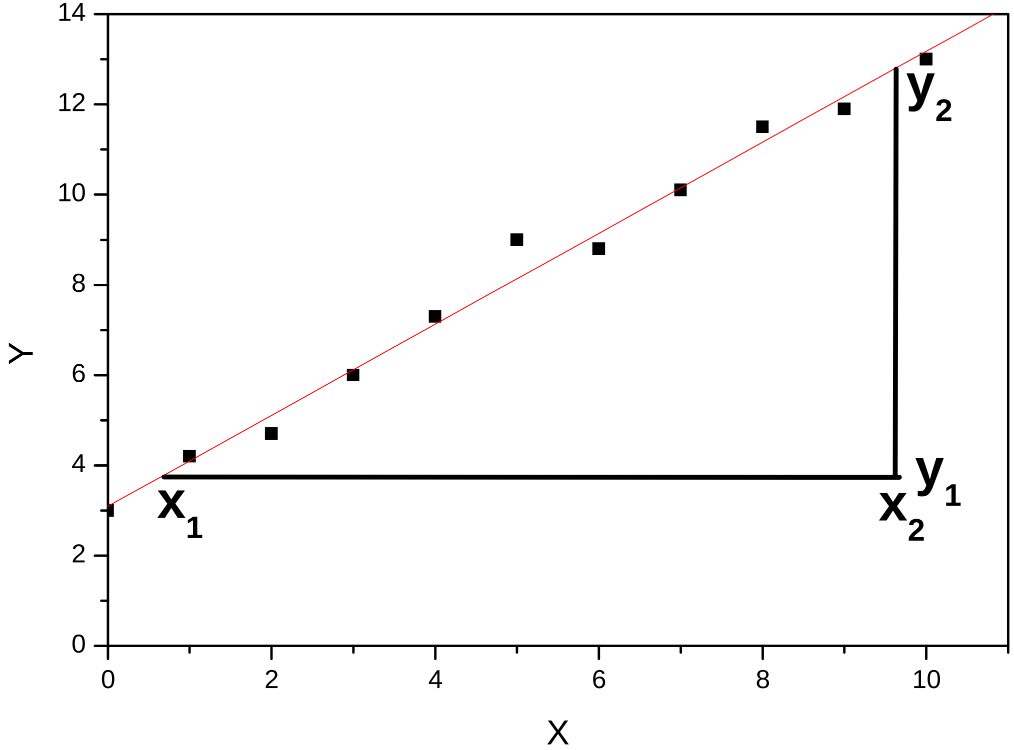
$$\Delta s = 0{,}05 \cdot 1{,}80 km = 0{,}09 km \qquad \Delta t = 0{,}05 \cdot 0{,}47 h = 0{,}024 h$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.80 km}{0{,}47 h} = 3{,}83 km \qquad \Delta v = \left|\frac{1}{t}\right| \cdot \Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right| \cdot \Delta t = 0{,}39 \frac{km}{h}$$

$$v = (3{,}38 \pm 0{,}39) \frac{km}{h} \qquad \frac{\Delta v}{v} = \frac{0{,}39}{3{,}38} = 0{,}11 \quad \rightarrow \quad 11\%$$

Graphische Darstellung und Analyse von Messwerten

Die Ausgleichsgerade



Funktion:

$$y = A + S \cdot x$$

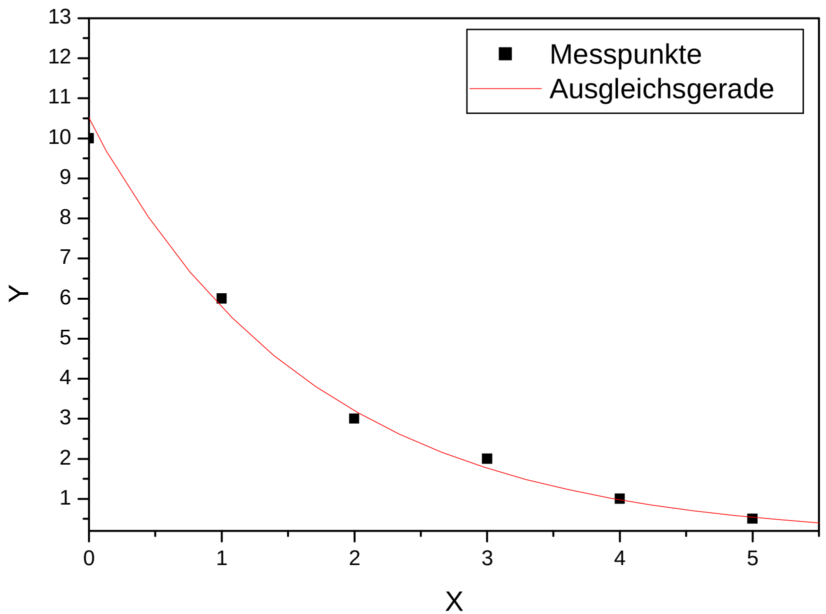
Steigung:

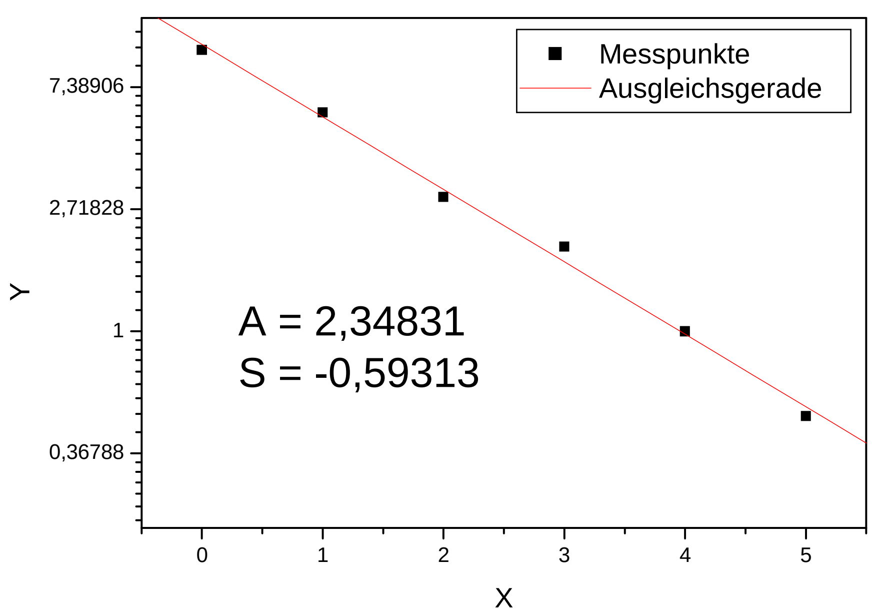
$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Achsenabschnitte: $A_y = y - S \cdot x$ $\qquad A_x = x - \frac{y}{S}$

Logarithmische Darstellung

$$\boxed{y = y_0 \cdot e^{-ax}}$$ mit a>0 $$y_0 = y(x=0)$$





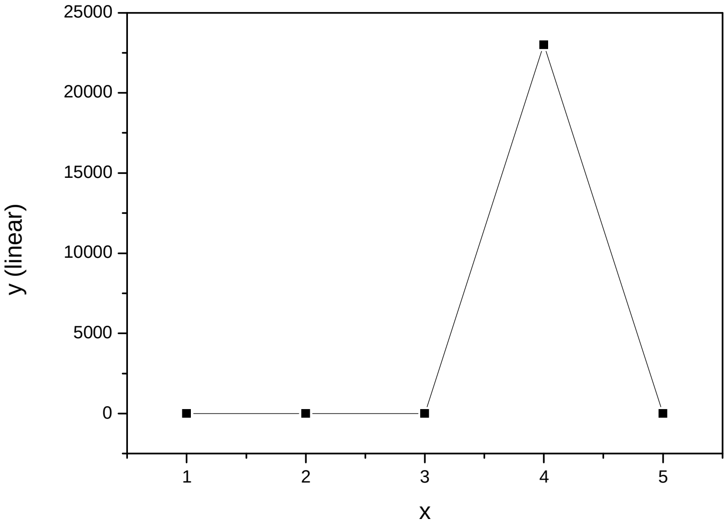
$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln(y) - \ln(y_0) = -a \cdot x \Rightarrow \boxed{\ln(y) = \ln(y_0) - a \cdot x}$$

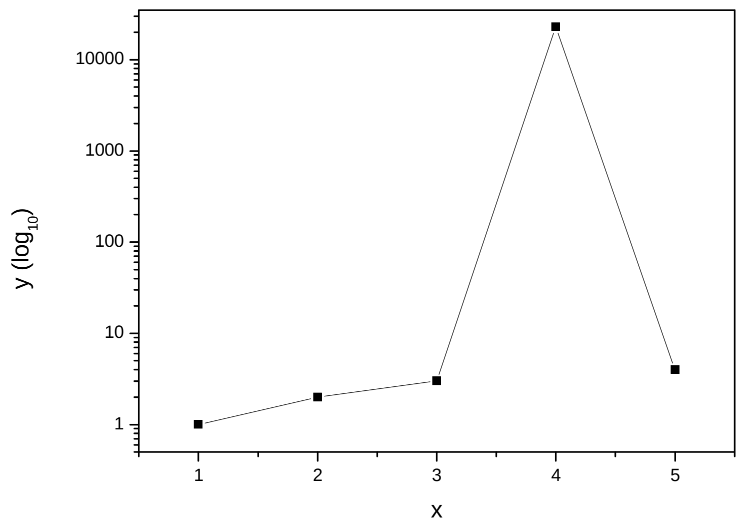
Logarithmische Darstellung

Allgemein: $$f(x) = a^{-b \cdot x} \qquad \log_a(f(x)) = \frac{\ln(f(x))}{\ln(a)} = -bx$$

Vorteile: Bestimmung der Parameter aus einer Geraden
Leichte Approximation kleinerer und größerer Messwerte

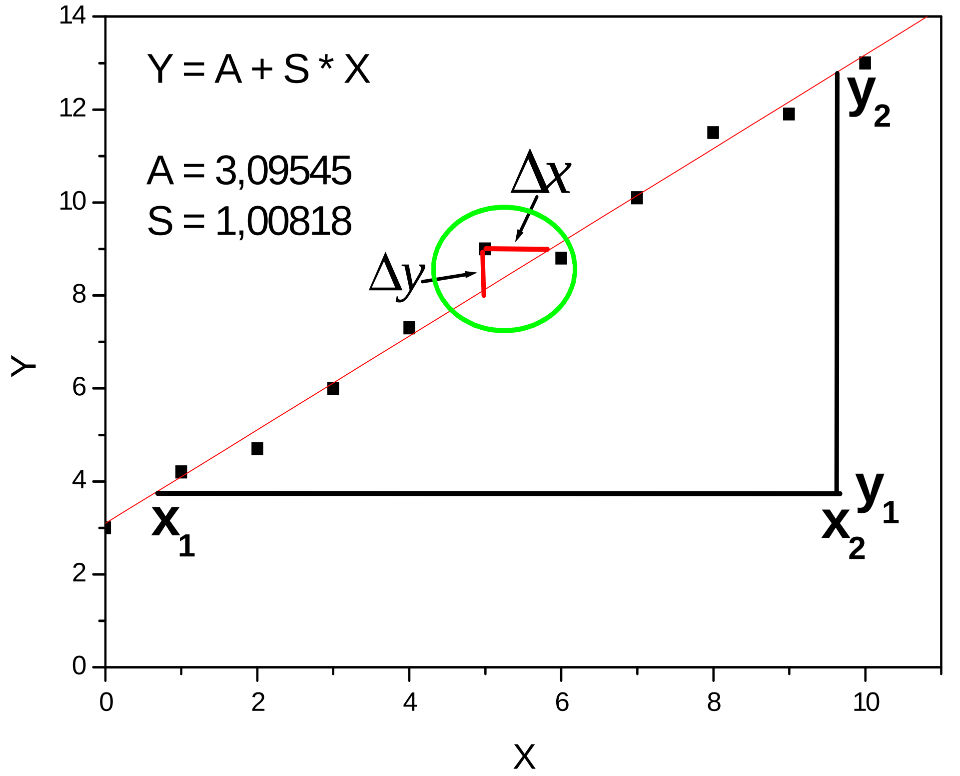
Anwendung auch, um weit auseinander liegende Messpunkte darzustellen:





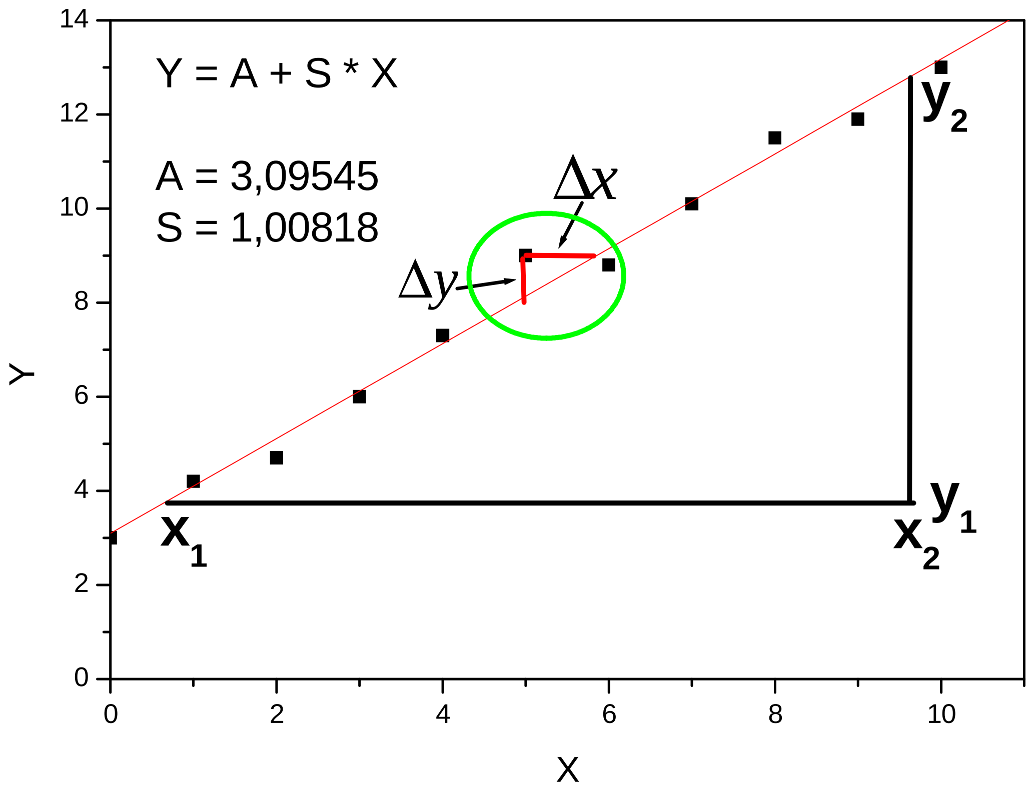
Fehlerrechnung bei graphischen Darstellungen

Fehler der Geradensteigung



$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{2\Delta x}{x_2 - x_1} \qquad \frac{\Delta S}{S} = \frac{2\Delta y}{y_2 - y_1}$$

Fehler des Achsenabschnittes



$$\Delta A_x = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\frac{\Delta S}{S^2} \qquad \Delta A_y = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\Delta S$$

Aufgabe:

Die Steigung einer Ausgleichsgeraden wurde aus einem Steigungsdreieck zwischen den Punkten P_1=(0, 1) und P_2=(5, 26) zu S = 5 bestimmt. Der am weitesten von der Geraden entfernte Punkt hat einen Abstand von 0,4 in x-Richtung und 0,5 in y-Richtung.

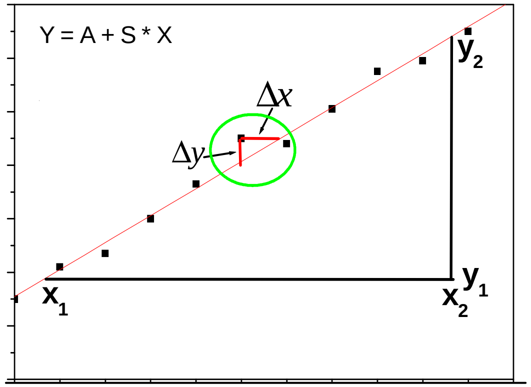
Bestimmen Sie den Fehler der Geradensteigung und der Achsenabschnitte.

$$\Delta S = \frac{2\cdot\Delta x}{x_2 - x_1}\cdot S = \frac{2\cdot 0{,}4}{5-0}\cdot 5 = 0{,}8$$

$$\Delta S = \frac{2\cdot\Delta y}{y_2 - y_1}\cdot S = \frac{2\cdot 0{,}5}{26-1}\cdot 5 = 0{,}2$$

$$\Delta A_x = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\cdot\frac{\Delta S}{S^2} = \left(\frac{1+26}{2}\right)\cdot\frac{0{,}8}{5^2} = 0{,}17$$

$$\Delta A_y = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\cdot\Delta S = \left(\frac{0+5}{2}\right)\cdot 0{,}8 = 2$$



Zusammenfassung

- Mittelwert, Standardabweichung von Einzelwert und Mittelwert
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Binomialverteilung

  ⇨ *Näherungsformeln*: Poissonverteilung, Gaußverteilung
- Fehlerfortpflanzung

  ⇨ Gaußsche Fehlerfortpflanzung (Fehler als Standardabweichung)

  ⇨ Maximalfehler
- Ergebnis muss immer mit Fehlergrenzen angegeben werden.
- Im Praktikum immer den Fehler Diskutieren, sowohl systematischer Fehler als auch statistischer Fehler!
- Graphische Darstellung von Messwerten

  ⇨ Fehler wird aus der Grafik bestimmt!

Referenzen und weiterführende Links

- S. Lange, Anleitung zum physikalischen Grundpraktikum – Teil 1, JLU Gießen (2009)
- W. Kühn, http://pcweb.physik.uni-giessen.de/pgp/fehler1-Dateien/v3_document.htm
- Bronstein, Taschenbuch der Mathematik, 7. Auflage, Kap. 16

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Die Folien können im StupIP heruntergeladen werden.