

QRPA-Rechnungen für Ladungsaustauschanregungen an exotischen Kernen

**Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07 – Mathematik und Informatik,
Physik, Geographie**

vorgelegt von

Abdul Ahad Ataie

aus Kandahar

2011

Dekan: Prof. Dr. Christian Diller
1. Gutachter: Prof. Dr. Horst Lenske
2. Gutachter: Prof. Dr. Hans Geissel

Tag der mündlichen Prüfung: 17.05.2011

Dissertation aus dem Fachbereich 07
Mathematik und Informatik,
Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Für meine Eltern.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Von der Schwachen Wechselwirkung zu Atomkernen	7
2.1	Elementare Wechselwirkungen	8
2.2	Der Betazerfall	10
2.2.1	Die Prozesse des β -Zerfalls	12
2.2.2	Charakterisierung der β -Zerfallskanäle	14
2.2.3	Ladungsaustauschanregungen	18
3	Greenfunktion in der nuklearen Vielteilchentheorie	21
3.1	Einteilchen-Greenfunktion	22
3.2	Lehmann Darstellung	24
3.3	Störungsrechnung	27
3.4	Selbstenergie	30
3.5	Polarisation	32
3.6	Kollektive Anregungen	34
4	Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung	37
4.1	Effektive Wechselwirkung im Kern	38
4.1.1	Dichtefunktionaltheorie	39
4.1.2	Nukleare Dichtefunktionale	41
4.2	Quasiteilchenbild	47
4.2.1	Paarkraft	47
4.2.2	BCS-Modell	49
4.2.3	Bogolyubov-Transformation	53
4.3	Rechnungen für Grundzustandseigenschaften von Kernen	56
5	Quasiteilchen Random Phase Approximation	63
5.1	Diskretisierung des Quasiteilchenkontinuums	64
5.2	Bestimmung der Kontinuumswellenfunktion	66
5.3	Bestimmung der Kontinuum-Greenfunktion	70

6	QRPA im Kontinuum	75
6.1	Kontinuumsanteil des Polarisationspropagators	76
6.2	Kontinuum-Antwort Funktion für Ladungsaustauschanregungen .	79
6.3	QRPA-Gleichung	82
7	Antwortfunktionen für Ladungsaustauschanregungen an Kernen	87
7.1	Kohlenstoff: ^{12}C	90
7.2	Magnesium: ^{24}Mg	96
7.3	Schwefel: ^{32}S	103
7.4	Eisen: ^{56}Fe	109
7.5	Nickel Isotopenkette	116
7.6	Einfluß von Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen auf Ladungs- austauschanregungen	125
8	Zusammenfassung	129
A	Anhang	133
A.1	Drehimpulskopplung	134
A.2	Wigner-Eckart-Theorem	137
A.3	Die Landau-Migdal Theorie	138
	Literaturverzeichniss	141
	Danksagungen	145

1

Einleitung

1 Einleitung

Die Entdeckung der natürlichen Radioaktivität im Jahre 1896 durch A. H. Becquerel markiert den Beginn der Kernphysik. Seit dieser Zeit hat sich das Verständnis über den Aufbau der Materie und die technischen Möglichkeiten zur Erforschung dessen Aufbaus stark gewandelt. Zum einen hat die Kernphysik das Feld der reinen Grundlagenforschung verlassen und bietet neben Messmethoden zur Altersbestimmung über den Isotopenzerfall Anwendung in der Energiegewinnung durch Kernkraftwerken oder zahlreichen medizinischen Anwendungen (Positronen-Emissions-Tomographie-Scans, Kernspintomographie, Ionenstrahltherapie u.v.m.). Zum anderen bietet sie immer noch viele offene Fragen über den Aufbau der Materie.

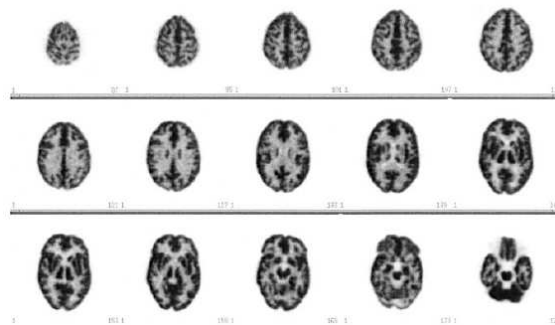


Abbildung 1.1: Dreidimensionale Bilder eines menschlichen Gehirns gemessen mit einem Positronen-Emissions-Tomographie-Scanners aus [38].

Zahlreiche Untersuchungen haben es ermöglicht, neben der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ein Verständnis über eine Fülle von Vielteilchenphänomenen des Kerns zu erlangen. Modernste Simulations- und Rechenmethoden ermöglichen es, den Kern als Vielteilchensystem zu betrachten und zu analysieren. So bieten kollektive Modelle, wie beispielsweise das von C. F. von Weizsäcker vorgeschlagene Tröpfchenmodell, einen Einblick in Bindungsenergie des Kerns und über Kernoberflächendeformationen und Vibrationen. Mikroskopische Modelle versuchen einen Einblick in die Struktur des Kerns zu liefern. So bietet das von Yukawa vorgeschlagene Modell des Ein-Bosonen-Austausch-Potentials einen Einblick in die Wechselwirkungsmechanismen, wie beispielsweise die Spin-Spin-Wechselwirkung, im Kern. In diesem Modell wird die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen über den Austausch von Bosonen beschrieben, hierbei hängt die Reichweite der Wechselwirkung von der Masse des Austauschbosons ab. Das Schalenmodell versucht die besonders hohe Stabilität der Kerne mit magischer Proton- und Neutronanzahl (2, 8, 20, 28, 50, 82 und 126) mit Hilfe eines mittleren Potentials, das durch ein Woods-Saxon-Potential (siehe Abbildung 1) gut angenähert wird, zu erklären. Mittelfeldmodelle hingegen ver-

suchen das N-Teilchenproblem durch N Einteilchenprobleme zu beschreiben, indem sie, ausgehend von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, das Nukleon im Kern als unabhängiges Teilchen in einem mittleren Feld, erzeugt durch die anderen Nukleonen, beschreiben. Da alle diese Modelle verschiedene Ansätze zu Grunde liegen und verschiedene Aspekte der Kernphysik in der Vordergrund gestellt werden, spielt der Vergleich mit experimentellen Daten eine entscheidende Rolle, um die Vorzüge bzw. Nachteile dieser Modelle zu erfassen.

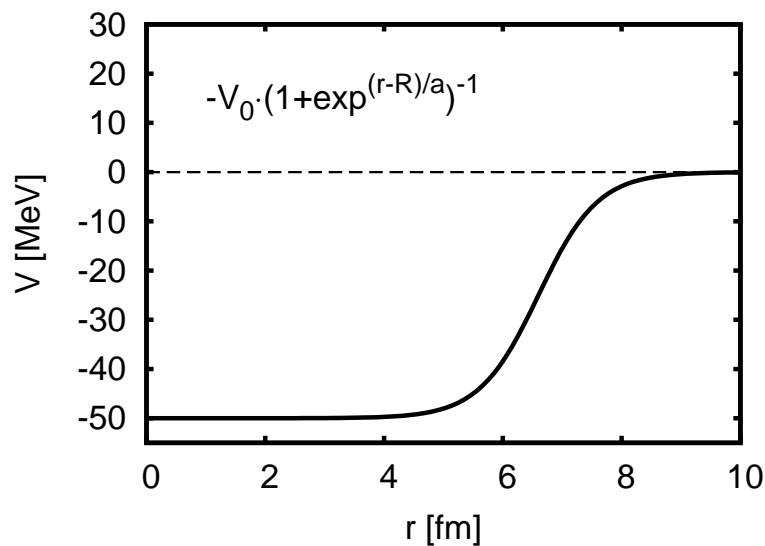


Abbildung 1.2: Wood-Saxon-Potential für ^{208}Pb angepasst. Parameter entnommen aus [30]

Neueste Entwicklungen im Bereich der Teilchenbeschleuniger haben ein neues Feld der Forschung eröffnet. Einrichtungen wie die Europäische Organisation für Kernforschung (Cern) in der Schweiz, die GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt, den Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) in den Vereinigten Staaten von Amerika und viele weitere sollen helfen eine Vielzahl von wichtigen Fragen der Kernphysik zu beantworten. Mit diesen technischen Mitteln ist es möglich Experimente mit einer Vielzahl von radioaktiven Kernen, viele von ihnen mit astrophysikalischer Wichtigkeit, durchzuführen und interessante Phänomene zu beobachten. Sie haben es ermöglicht, die Einschränkung auf natürlich vorkommende Elemente zu überwinden und exotischer Kerne im gesamten Spektrum der Nuklidkarte (Abbildung 1.3) zu untersuchen.

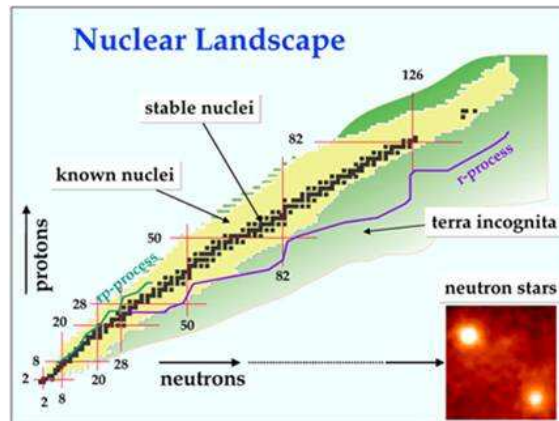


Abbildung 1.3: Nuklidkarte der bekannten Elemente. Das Bild ist der Homepage der Nuclear Physics Group der University of Liverpool entnommen.

Betrachtet man die Verteilung der Kerne auf der Nuklidkarte (Abbildung 1.3) genauer, so lassen sich diese in mehrere Gruppen unterteilen. Die stabilen Kerne bilden das Tal der Stabilität (schwarzer Bereich) und spalten die Nuklidkarte in zwei Hälften: die protonenreichen Kerne über dem Tal und die neutronenreichen Kerne im unteren Bereich. Wie Abbildung 1.3 zeigt, bilden die bekannten Nuklide nur einen kleinen Anteil der Nuklidkarte, der größere Bereich wird von den β -instabilen, mehrheitlich unbekanntem Kernen aufgespannt. Dieser Bereich spielt für das Verständnis der Kernstruktur eine wichtige Rolle und findet in der Astrophysik Anwendung, da er Aufschluss über die Nukleosynthese (dem r-Prozess) und den Aufbau von Neutronensternen gibt [3]. Moderne Teilchenbeschleuniger ermöglichen es diesen Bereich mit Hilfe von den schon erwähnten Schwerionenreaktionen näher zu betrachten. Dabei werden spektroskopische Untersuchungen von (p, n) und (n, p) artigen Übergängen durchgeführt. Für Untersuchungen von β -Zerfallsraten spielen Ladungsaustauschanregungen eine wichtige Rolle. Das Verständnis der Stärke der schwachen Wechselwirkung und die Mechanismen der Ladungsaustauschanregung sind zum einen für das Verständnis des Kerns von fundamentaler Wichtigkeit, zum anderen bieten sie für die Astrophysik wichtige Daten. Mit ihrer Hilfe kann beispielsweise die Entstehung der Materie im r-Prozess, der Nukleosynthese in Supernovaexplosionen, untersucht werden.

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Ladungsaustauschanregungen an stabilen und exotischen Kernen. Ausgehend von einem selbstkonsistenten Hartree-Fock-Bogolyubov-Grundzustand werden QRPA Rechnungen für Ladungsaustauschanregungen berechnet. Hierbei wird ein erweiterter QRPA-Ansatz angewendet, der neben Paarungseffekten, Kopplungen ans Kontinuum und dissi-

pative Anteile berücksichtigt. Durch eine direkte Lösung der Dyson-Gleichung wird der Polarizationspropagator bestimmt, aus welchem die spektrale Verteilung und die Übergangswahrscheinlichkeiten für Ladungsaustauschanregungen extrahiert wird. Es werden Beispielrechnungen für ausgewählte Kerne vorgestellt und mit experimentellen Daten verglichen.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Kapitel 2 gibt eine Einführung in das Feld der Kernstrukturphysik mit dem Ziel einen Einblick in den Prozess des β -Zerfalls und von Ladungsaustauschanregungen zu geben.

Der erste Abschnitt befasst sich mit den elementaren Wechselwirkungsmodellen. Es wird ein Überblick der einzelnen Wechselwirkungen gegeben und erläutert in welchem Rahmen diese für eine makroskopische Untersuchung der Kernstruktur relevant sind. Anschließend wird der Prozess des β -Zerfalls vorgestellt. Zu Beginn werden die zugrundeliegenden Mechanismen, welche unter dem Überbegriff β -Zerfall zusammengefasst sind, näher erläutert, dabei werden neben der mikroskopischen Beschreibung Charakterisierungsmerkmale vorgestellt die eine Differenzierung der jeweiligen Zerfallskanäle ermöglichen. Abschließend werden Ladungsaustauschanregungen vorgestellt und ihre Stärke bei der Untersuchung verdeutlicht, die sie im Vergleich zu Untersuchungen an natürlich β -instabile Kernen besitzen.

Kapitel 3 stellt den Greenfunktionsformalismus, als Werkzeug zur Untersuchung von Korrelationen zwischen Zuständen in Vielteilchensystem, vor. Begonnen wird hierbei mit der Einteilchen-Greenfunktion. Für ein besseres Verständnis des Formalismus werden mit Hilfe der Lehmandarstellung, der Energiedarstellung der Greenfunktion, allgemeine Eigenschaften der Greenfunktion untersucht. Zur Bestimmung der Greenfunktion wird gezeigt, wie diese mit störungstheoretischen Mitteln ermittelt werden kann. Hierbei ist die Einführung von Selbstenergien und Polarisierungen von Interesse und bietet neben der rechnerischen Hilfestellung eine physikalische Interpretation der Untersuchung. Abschließend werden kollektive Anregungen in Vielteilchensystemen, welche beispielsweise bei Kernen mit nicht abgeschlossenen Schalen beobachtbar sind, behandelt.

Kapitel 4 befasst sich mit effektiven Kern-Wechselwirkungen. Zunächst wird die Dichtefunktionaltheorie vorgestellt, welche es ermöglicht das Vielteilchenproblem des Kerns mit Hilfe von Energiedichtefunktionalen zu behandeln. Anschließend werden mit der Skyrme Wechselwirkung und der M3Y-Wechselwirkung zwei verbreitete Beispiele für Nukleare Dichtefunktionale gegeben. Im Anschluss wird der Effekt der Paarkraft, der Kopplung von Proton-Proton und Neutron-Neutron Paaren in geraden Kernen, behandelt. Der dem Supraleitungseffekt ähnliche Effekt wird zum einen mit Hilfe des BCS-Modells behandelt

und zum anderen durch die Einführung des Quasiteilchenbilds erläutert. Abschließend werden Ergebnisse von Hartree-Fock-Bogolyubov-Rechnungen für verschiedene Kerne aufgezeigt.

In Kapitel 5 wird das aus Kapitel 3 bekannte und mit Hilfe des Quasiteilchenbilds erweiterte Konzept der kollektiven Anregungen unter der Berücksichtigung der Kontinuumszustände ausgebaut. Hierzu wird zunächst das Quasiteilchenkontinuum diskretisiert und deren Kontinuumswellenfunktionen bestimmt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden in Kapitel 6 zum einen die Kontinuums-Greenfunktion bestimmt und zum anderen die QRPA für das Quasiteilchenkontinuum erweitert.

Kapitel 7 stellt Ergebnisse für Ladungsaustauschanregungen an Kernen vor. Es werden zum einen Antwortfunktionen für ^{12}C , ^{24}Mg , ^{32}S und ^{56}Fe für den $p \rightarrow n$ Prozess sowie $n \rightarrow p$ vorgestellt und mit experimentellen Daten verglichen. Zum anderen werden Summenregeln für die β^+ - und β^- -Übergänge untersucht. Für ein Verständnis der Entwicklung innerhalb einer Isotopenkette wird die Isotopenkette von Nickel näher beleuchtet. Abschließend wird am Beispiel von ^{56}Fe der Einfluss von Zwei- und Dreikörperkorrelationen auf die Antwortfunktion des Ladungsaustauschprozesses untersucht.

Den Abschluss der Arbeit bildet eine Zusammenfassung in Kapitel 8.

2

Von der Schwachen Wechselwirkung zu Atomkernen

2.1 Elementare Wechselwirkungen

Betrachtet man in der Physik die Wirkung eines Objekts auf ein anderes und ihre kollektiven Eigenschaften, so stellt sich die Frage, welchen Wechselwirkungen die einzelnen Objekte unterliegen. Als die vier fundamentalen Wechselwirkungen bezeichnet man in der Physik die Gravitation, die elektro-magnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung und die starke Wechselwirkung.

Die Gravitation ist die dominante Kraft bei der Behandlung makroskopischer Objekte. Sie beschreibt mit ihrer langen Reichweite neben den alltäglichen Erfahrungen durch die Erdanziehung auch Phänomene wie die Planetenbewegung im Sonnensystem, die Struktur von Galaxien, schwarze Löcher und die Expansion des Universums. Ungeachtet der Tatsache, dass die Gravitation zwischen allen Teilchen mit Masse eine attraktive und nicht abschirmbare Kraft auswirkt, wird sie meist aufgrund ihrer Schwäche in mikroskopischen Untersuchungen der Teilchenphysik vernachlässigt.

Wechselwirkung	Reichweite [m]	Austauschteilchen
Starke	$\approx 10^{-15}$	Gluonen
Elektromagnetische	∞	Photonen
Schwache	$< 10^{-15}$	W- und Z Bosonen
Gravitation	∞	Gravitonen

Tabelle 2.1: Fundamentale Wechselwirkungen.

Die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt die Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Objekten. Sie vereint die Phänomene der Coulomb-Kraft und der Lorentz-Kraft. Wie die Gravitation, besitzt sie eine unendliche Reichweite und findet sowohl in vielen alltäglichen Phänomenen Anwendung: Sie beschreibt von der Gitterstruktur in Festkörpern, den Phänomenen der Reibung, den elektrischen Strom und seine Anwendung bis hin zu den Eigenschaften der chemischen Elemente wie beispielsweise chemische Bindungen.

Betrachtet man Phänomene auf einer Energieskala ab 100 GeV, so kann die elektromagnetische Wechselwirkung mit der schwachen Wechselwirkung zur elektro-schwachen Wechselwirkung zusammengefasst werden. Untersucht man die Temperaturen kurz nach den Urknall, so findet man Temperaturen über 10^{15} K. Um in diesem Zeitraum die Entstehung und Entwicklung des Universums zu beschreiben spielt die elektro-schwache Wechselwirkung eine wichtige Rolle.

1979 bekamen Abdus Salam, Sheldon Glashow and Steven Weinberg für ihren Beitrag zu dieser Vereinigung den Nobel-Preis in Physik verliehen.

Die starke Wechselwirkung ist verantwortlich für die Bindung von Quarks und den Gluonen zu Hadronen und indirekt zu Atomkernen. Als Wechselwirkung zwischen den Quarks und den Gluonen, ihren Austauschpartikeln, wird sie durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Hierfür haben Fritzsche, Gell-Mann und Leutwyler 1973 das Konzept der Farbladung eingeführt [29]. Hierbei sind nicht nur die Quarks, sondern auch die Gluonen farbgeladen. Somit, anders als die Austauschpartikeln der anderen Wechselwirkungen, können die Gluonen auch untereinander wechselwirken. Für diese Beschreibung wurde 2005 der Nobel-Preis in Physik verliehen. Die Eigenschaften der Wechselwirkung sind stark von den Abständen der wechselwirkenden Teilchen abhängig. Für kurze Abstände ist ihre Kopplungskonstante gering, wohingegen sie für große Abstände anwächst, was als laufende Kopplungskonstante bezeichnet wird. Dies führt dazu, dass sie die Farbladung, an welche sie koppelt, abschirmt und sie für Abstände ab 10 fm praktisch unbeobachtbar ist. Obwohl die QCD die starke Wechselwirkung beschreibt ist ihre rechen-technische Umsetzung schwierig, hierzu werden zur Beschreibung von hadronischen Systemen werden meist effektive Wechselwirkungen verwendet. In der Kernphysik wird diese effektive Wechselwirkung zwischen den Protonen und Neutronen durch den Austausch von Mesonen beschrieben.

Die schwache Wechselwirkung ist für die Phänomene in Kernen verantwortlich. Sie koppelt mit ihren Austauschpartikeln, den W- und Z-Bosonen, Leptonen und an den Isospin der Quarks der Nukleonen und beschreibt somit Prozesse im Isospinkanal. Sie ist die einzige Wechselwirkung, welche in der Lage ist den Flavour zu verändern und somit Übergänge im Flavour-Multiplet ermöglicht (siehe Abbildung 2.1). Im besonderen ist sie für den β -Zerfall der Nukleonen verantwortlich. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, über Ladungsaustauschanregungen einen Einblick über die Struktur der Kerne zu gewinnen und Auskunft über die effektive Kernwechselwirkung zu erhalten. 1957 gelang C.S. Wu im berühmten Wu-Experiment nachzuweisen, dass die schwache Wechselwirkung die Parität verletzt [58]. 1964 entdeckten die amerikanischen Physiker James Christenson, James Cronin, Val Fitch und René Turlay zusätzlich, dass die schwache Wechselwirkung auch die CP-Symmetrie verletzt [18]. Für diese Entdeckung bekamen 1980 Cronin und Fitch den Nobelpreis für Physik. Neben der Kernstrukturphysik spielt die schwache Wechselwirkung insbesondere in der Astrophysik eine fundamentale Rolle. Sie bildet die Grundlage der Theorie der Nukleosynthese, welche das Proton-Neutron-Verhältnis beschreibt und ein entscheidender Parameter für die Gestalt der Isotopenhäufigkeit ist.

Für das Verständnis von Typ I Supernovae spielt sie bei der Bildung von Urca Schalen bei hoher Elektronendegeneration, welche die Kühlung vor der Kohlenstoffzündung dominieren, eine wichtige Rolle. Für Typ II und ihnen verwandten Supernovae beschreibt die schwache Wechselwirkung den Zusammenbruch des Rumpfes.

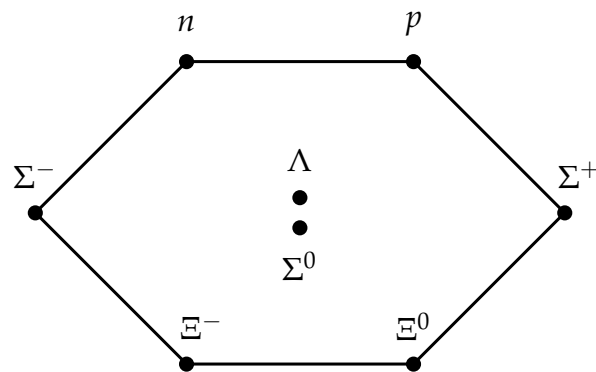


Abbildung 2.1: Baryonen Oktett: Ordnung der Baryonen nach Hyperladung Y (von oben nach unten zunehmend) und der I_3 Komponente des Isospins (von links nach rechts zunehmend).

2.2 Der Betazerfall

Die Entdeckung der natürlichen Radioaktivität und die Erforschung der damit verbundenen Phänomene des α -, β - und γ -Zerfalls verbindet einige aufregende Episoden der modernen Physik. Ihre Entdeckung 1896 durch Becquerel deutet, zum einen, den Beginn der Kernphysik an und verbindet zum anderen die Kern- und Teilchenphysik mit der schwachen Wechselwirkung. Aus historischer Sicht sind die Untersuchungen zum β -Zerfall mit namenhaften Physikern des Zwanzigsten Jahrhunderts verbunden.

1899 beobachtete Rutherford, dass β^- -Strahlen die gleichen Eigenschaften wie Elektronen aufweisen.

James Chadwick zeigt 1914 durch Messung der Energieverteilung der emittierten Elektronen, dass der β -Zerfall, im Vergleich zum α - (Abb. 2.2) und γ -Zerfall, ein kontinuierliches Spektrum (Abb. 2.3) aufweist.

Um die Energie- und Drehimpulserhaltung beim Zerfallsprozess zu gewährleisten sagte Pauli 1930 die Existenz eines weiteren nahezu masselosen, neutralen und schwach wechselwirkenden Teilchen im Zerfallsprozess voraus. Fermi, welcher 1934 eine erste theoretische Beschreibung des Zerfallsmechanismus mit Hilfe einer Feldtheorie gelang, gab diesem Teilchen den Namen Neutrino.

1958 gelang Lee und Yang mit Hilfe des β -Zerfalls der Nachweis der Paritäts-

verletzung der schwachen Wechselwirkung.

Im Folgenden wird die theoretische Beschreibung des β -Zerfalls zusammengefasst und auf die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Zerfallskanäle eingegangen.

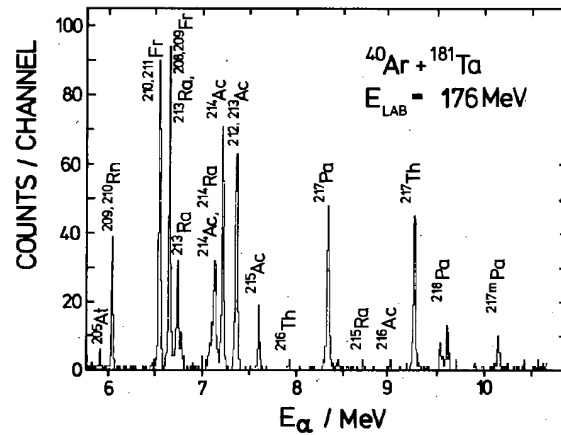


Abbildung 2.2: α -Zerfall Spektrum der Verdampfungsprodukte erzeugt in der Reaktion $^{40}\text{Ar} + ^{181}\text{Ta}$ aus [52].

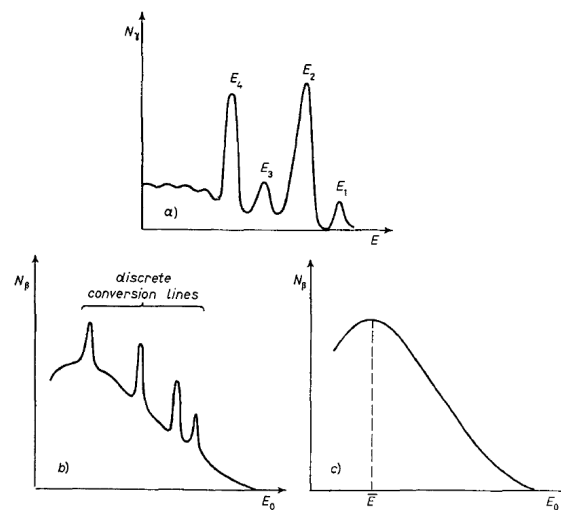


Abbildung 2.3: Experimentell beobachtete Spektren für a) γ -Strahlung (diskrete Linien), b) β -Strahlung überlagertes kontinuierliches Spektrum mit diskreten Energien aus γ -Zerfällen, c) kontinuierliches β -Spektrum aus [28].

2.2.1 Die Prozesse des β -Zerfalls

Unter dem Begriff des β -Zerfalls werden drei Elementarprozesse zusammengefasst, welche den Übergang eines Nukleons im Isopinkanal beschreiben.

Im allgemeinen unterscheidet man drei Zerfälle: Den β^- -Zerfall, der den Übergang eines Neutrons in ein Proton unter Erzeugung eines Elektron-Neutrino-Paars beschreibt. Den β^+ -Zerfall, der den umgekehrten Übergang eines Protons in ein Neutron unter Erzeugung eines Positron-Neutrino-Paars beschreibt und den sogenannten Elektroneneinfang (EC) (engl.: electron capture), welcher die Umwandlung eines Protons und einem Elektron aus der innersten Schale, der K-Schale, in ein Neutron und ein Elektroneneutrino beschreibt.

Der β -Zerfall lässt sich somit schematisch als Reaktionsgleichung folgendermaßen darstellen:

- $\beta^-: n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- $\beta^+: p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$
- EC: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$

Tabelle 2.2 zeigt die an den Reaktionen beteiligten Teilchen und ihre Massen. Durch Vergleich ihrer Massenbilanz mit den dazugehörigen Zerfallsenergien:

- $Q_{\beta^-} = m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 > 0,$
- $Q_{\beta^+} = m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2 < 0,$
- $Q_{EC} = m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 < 0$

erkennt man, dass nur der β^- -Zerfall außerhalb des Kerns möglich ist. Der β^+ -Zerfall und der Elektroneneinfang benötigen zusätzlich Energie, welche aus der Bindungsenergie des Kerns gewonnen wird. Dies führt dazu, dass diese beiden Prozesse nicht im freien Raum beobachtbar sind.

TEILCHEN	SYMBOL	MASSE
Protonen	p	$938 \text{ MeV}/c^2$
Neutronen	n	$939 \text{ MeV}/c^2$
Elektronen	e^-	$0,5 \text{ MeV}/c^2$
Positronen	e^+	$0,5 \text{ MeV}/c^2$
Elektronneutrino	ν_e	$< 2,2 \text{ eV}/c^2$
Elektronantineutrino	$\bar{\nu}_e$	$< 2,2 \text{ eV}/c^2$

Tabelle 2.2: Am β -Zerfall beitragende Teilchen. Die angegebenen Massen sind [32] entnommen.

Zusätzlich zum bekannten β^- -Zerfall, dessen emittiertes Elektron in einen Kontinuumszustand übergeht, sagten die Französischen Physiker Jean, Daudel und Lecoine im Jahre 1947 den gebundenen β^- -Zerfall voraus. Hierbei geht das emittierte Elektron in einen gebundenen Zustand des Tochterkerns über und das Elektronantineutrino wird ins Kontinuum emittiert. Die experimentelle Bestätigung dieses Phänomens gelang 1992 durch die Beobachtung des Zerfalls von $^{206}\text{Tl}^{81+}$ Ionen zu $^{206}\text{Pb}^{81+}$ Ionen mit Hilfe des Fragment Separators an der GSI in Darmstadt [12].

Eine modelhafte Beschreibung des schwachen Zerfalls im Kern bietet die Impulsnäherung. Hierbei wird ein Kern aus A Nukleonen betrachtet und in $A - 1$ als Zuschauer agierende Nukleonen und dem zerfallenden Restkern (Abbildung. 2.4) aufgeteilt. Während das zerfallende Nukleon die schwache Wechselwirkung unterliegt, werden, wie in Abbildung 2.5 dargestellt, die restlichen $A - 1$ Nukleonen als an dem Prozess unbeteiligte Zuschauer behandelt. Für den vierer Impulstransfer der nuklearen Prozesse wirkt hierbei die schwache Wechselwirkung wie eine Kontaktwechselwirkung, was zu einer Konstanten im Impulsraum führt. Die starke Wechselwirkung zwischen Restkern und zerfallendem Nukleon wirkt nur im Anfangs- und Endzustands des Zerfalls.

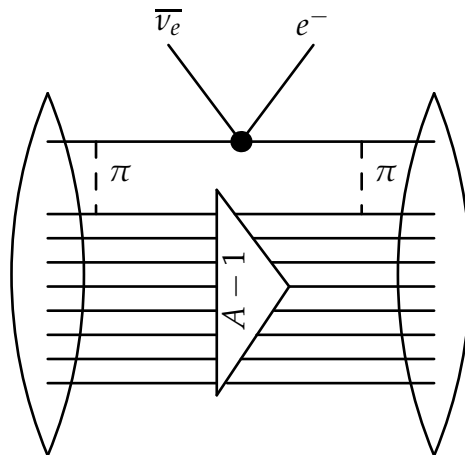


Abbildung 2.4: Näherung der unabhängigen Teilchen für den β^+ -Zerfall.

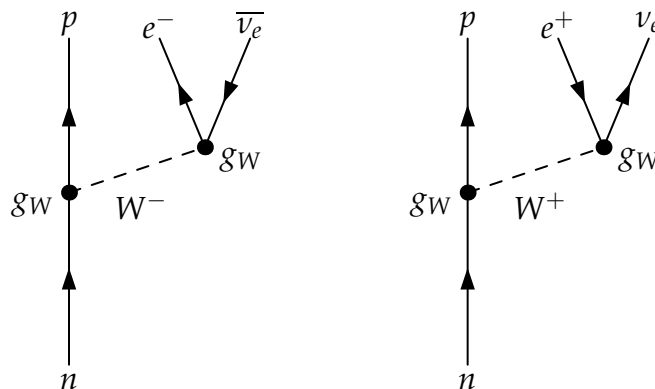


Abbildung 2.5: Feynman-Diagramm für den β^+ - und β^- -Zerfall.

2.2.2 Charakterisierung der β -Zerfallskanäle

Zusätzlich zur Einteilung des β -Zerfalls in drei Zerfallskanäle lassen sich durch eine systematische Untersuchung der Zerfallsprodukte weitere charakteristische Zerfallskanalunterteilungen feststellen.

Fermi- und Gamow-Teller-Übergänge

Eine Charakterisierungsmöglichkeit bietet die Zustandsänderung des Mutterkerns zum Tochterkern. Die Zustandsänderung kann durch die Betrachtung der

beiden Leptonen im Endzustand bestimmt werden. So bieten sich für diese Spin- $\frac{1}{2}$ Fermionen ($e^- \bar{\nu}_e$ bzw. $e^+ \nu_e$) zwei mögliche Endzustände bezüglich des von ihnen getragenen Gesamtspins an:

Zerfälle, bei denen die Leptonen im Endzustand zum Gesamtspin $S = 0$ koppeln, werden als Fermi-Übergänge bezeichnet und sind mit einer Erhaltung des Drehimpulses im Gesamtdrehimpuls des Kerns verbunden ($\Delta J = |J_i - J_f| = 0$). Koppeln hingegen die beiden Leptonen zum Gesamtspin $S = 1$, was mit einer Drehimpulsänderung von 1 und somit mit dem Umklappen des Nukleonenspins verbunden ist, werden diese als Gamow-Teller-Übergänge bezeichnet.

Fermi-Übergang				
n	\rightarrow	p	$+$	$e^- + \bar{\nu}_e$
\uparrow	\rightarrow	\uparrow	$+$	$\downarrow\uparrow$

Gamow-Teller-Übergang				
n	\rightarrow	p	$+$	$e^- + \bar{\nu}_e$
\uparrow	\rightarrow	\downarrow	$+$	$\uparrow\uparrow$

Zur Bestimmung des Übergangsmatrixelemente müssen die Operatoren der Fermi- und Gamow-Teller-Übergänge bestimmt werden. Für den Fermi-Operator \hat{O}_F kann der Einheitsoperator $\mathbb{1}$ und für den Gamow-Teller-Operator \hat{O}_{GT} der Pauli-Spin-Operator $\hat{\sigma}$ verwendet werden. Diese Operatoren sind die einfachsten zu konstruierenden Skalare und Axial-Vektoren, welche die Auswahlregeln für die jeweiligen Zerfallsarten erfüllen. Für die Matrixelemente dieser Übergänge ergibt dies somit:

$$M_{if}^F = \langle N_i, Z_i | \mathbb{1} \hat{\tau}_{\pm} | N_f, Z_f \rangle$$

$$M_{if}^{GT} = \langle N_i, Z_i | \hat{\sigma} \hat{\tau}_{\pm} | N_f, Z_f \rangle.$$

Dabei ist $\hat{\tau}$ der Isospinoperator, was dem Pauli-Operator im Isopinraum entspricht und $|N_i, Z_i\rangle$ und $|N_f, Z_f\rangle$ sind die Anfangs und Endzustände.

log ft-Wert

Eine weitere Größe, zur Charakterisierung des Zerfalls ist der sogenannte log ft -Wert, welcher Kernstruktureffekte zur Charakterisierung berücksichtigt. Betrachtet man die Zerfallskonstante λ und die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ für verschiedener Kerne, so läßt sich eine funktionale Abhängigkeit der Zerfallskonstante finden. Abbildung 2.6 zeigt ein sogenanntes Sargent-Diagramm, mit welchem gezeigt werden kann, dass die Zerfallskonstante λ als Funktion f in Abhängigkeit von der Ordnungszahl des Mutterkerns Z und der Maximalenergie des emittierten Elektron E_{\max} geschrieben werden:

$$\lambda = \frac{2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

$$= f(Z, E_{\max})$$

kann.

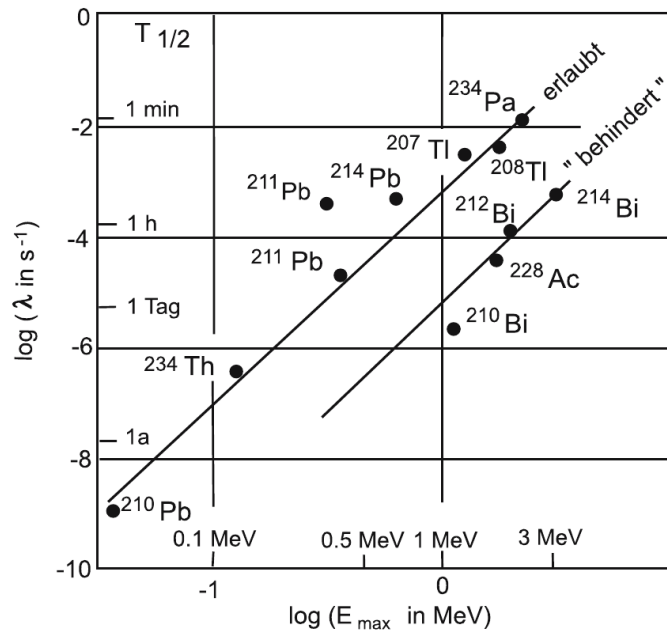


Abbildung 2.6: Sargent-Diagramm aus [9].

Die Zerfallskonstante λ kann mit Hilfe der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten B_F und B_{GT} für die Fermi- und Gamow-Teller-artigen Übergänge und dem Phasenraumfaktor f_0 dargestellt werden:

$$\lambda = \frac{G_f m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} f_0 (B_F + B_{GT}).$$

Die reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten B_F und B_{GT} lassen sich wiederum mit Hilfe der Matrixelemente berechnen:

$$B_F = \frac{g_V^2}{2J_i + 1} |M_F|^2,$$

$$B_{GT} = \frac{g_A^2}{2J_i + 1} |M_{GT}|^2$$

wobei g_V und g_A die Vektor- und die Axialvektor-Kopplungskonstante sind. Der Phasenraumfaktor f_0 beinhaltet die Informationen über die Kernstruktur und kann für den β^- - sowie für den β^+ -Zerfall wie folgt bestimmt werden:

$$f_0^\mp = \int_1^{E_0} F_0(\pm Z_f, \varepsilon) p \varepsilon (E_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon$$

mit $\varepsilon = \frac{E_e}{m_e c^2}$, $E_0 = \frac{E_i - E_f}{m_e c^2}$ und $p = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. E_e bezeichnet hierbei die Gesamtenergie des emittierten Elektrons und E_i und E_f als Anfangs- und Endzustandsenergie des Nukleons.

Für den Elektroneneinfang lässt sich f_0 über:

$$f_0^{EC} = 2\pi(\alpha Z_i)^3 (\varepsilon_0 + E_0)^2 \quad (2.1)$$

bestimmen. Die Gesamtenergie $\varepsilon = \frac{m_e c^2 - B}{m_e c^2}$, wobei B die Bindungsenergie des Elektrons im $1s$ Orbital B ist, wird in Gleichung 2.1 durch $\varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha Z_i)^2$ genähert. Hier bezeichnet $\alpha = \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante.

Betrachtet man den Logarithmus des Produkts aus Phasenraumfaktor f und der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$, den sogenannten $\log ft$ -Wert, genauer, so kann man sehen dass alle β -Zerfälle sich nach wenigen $\log ft$ -Werten gruppieren lassen.

Man unterscheidet zwischen sogenannten erlaubten und verbotenen β -Zerfällen. Bei einem erlaubten Zerfall werden die Leptonen in Endzustand in einem s ($l = 0$) Zustand relativ zum Kern emittiert. Diese Zerfälle haben einen charakteristischen $\log ft$ -Wert von bis zu 5,7. Zerfälle, deren Leptonen im Endzustand einen Drehimpuls höherer Ordnung tragen, bezeichnet man als verboten. Diese Zerfälle besitzen einen $\log ft$ -Wert größer als 5,7. Tabelle 2.2.2 zeigt eine feinere Unterteilung der Zerfälle mit Beispielen für die einzelnen Arten. Abbildung 2.7 zeigt eine Häufigkeitsverteilung in Abhängigkeit vom $\log ft$ -Wert.

Art des Zerfalls	$\log ft$	Isotope
supererlaubt	2.9 – 3.7	n
nicht-bevorzugt erlaubt	3.8 – 6.0	^{35}S
l-verboten erlaubt	≥ 5.0	^{198}Au
einfach-verboten einzigartig	8 – 10	^{91}Y
einfach-verboten nicht-einzigartig	6 – 9	
zweifach-verboten	11 – 13	^{137}Cs
dreifach-verboten	17 – 19	^{87}Rb
vierfach-verboten	> 22	^{115}In

Tabelle 2.3: Unterteilung der Kernzerfälle nach $\log ft$ -Werten.

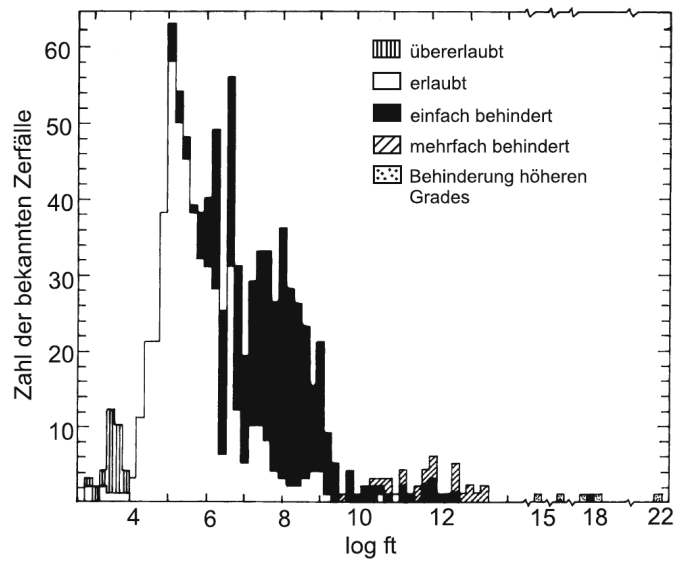


Abbildung 2.7: Häufigkeit der β -Zerfälle als Funktion der $\log ft$ Werte aus [9].

2.2.3 Ladungsaustauschanregungen

Die Untersuchung des Betazerfalls bietet eine Möglichkeit die Struktur von Kernen näher zu untersuchen, ist aber durch begrenzte Anzahl von Kernen die durch β^\pm -Emission zerfallen eingeschränkt. Eine weitere Untersuchung der Kernstruktur bieten sogenannte Ladungsaustauschanregungen, die gewissermaßen den umgekehrten Prozess beschreiben. Wie in Abbildung 2.2.3 zu sehen ist, wird hierbei ein Kern im Grundzustand über eine Ladungsaustauschanregung angeregt und kann je nach Ladungsaustausch in einen Zustand des Tochterkerns ${}^A_{Z+1}X'_{N-1}$ oder ${}^A_{Z-1}X''_{N+1}$ übergehen, wobei die spektroskopische Notation verwendet wurde.

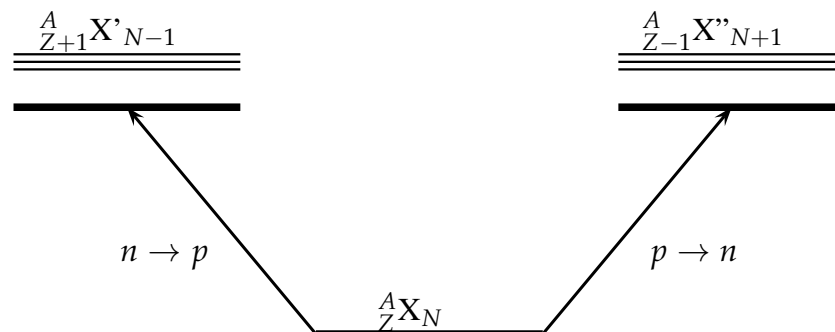
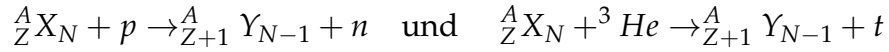
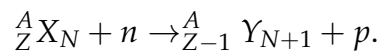


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung einer Ladungsaustauschanregungen.

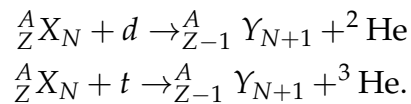
Dies ermöglicht die systematische Untersuchung der Zustände der jeweiligen Tochterkerne. Experimentell werden β^- -Übergänge, d.h. die Verminderung des Isospins um eine Einheit, durch die Reaktionen:



realisiert. Der umgekehrte Prozess der β^+ -Übergänge, d.h. der Erhöhung des Isospins, ist deutlich komplizierter. Am TRIUMF, dem Kanadischen nationalen Labor für Teilchen- und Kernphysik, werden hierfür Neutronen durch die Reaktion ${}^7\text{Li}(p, n)$ erzeugt [33] und ermöglichen somit eine weitere Nutzung für die Reaktion:



Eine weitere Möglichkeit, β^+ -Übergänge zu untersuchen, bieten sowohl sekundäre Tritiumstrahlen als auch Deuteronen über die Reaktion:



Mit Hilfe dieser experimentellen Hilfsmittel ist es möglich, Ladungsaustauschanregungen und somit Strukturuntersuchungen an Kernen fern ab des Tals der Stabilität durchzuführen.

Neben den (p, n) und (n, p) , welche eine geringe Auflösung von typisch 1 MeV besitzt, ist es möglich Schwerionenreaktionen, beispielsweise $({}^7\text{Li}, {}^7\text{B})$ [15, 16, 24, 48], $({}^{12}\text{C}, {}^{12}\text{N})$ [13, 43], $({}^{12}\text{C}, {}^{12}\text{B})$ oder $({}^{48}\text{Ti}, {}^{48}\text{Sc})$ [14] für Ladungsaustauschanregungen zu nutzen.

Auf der einen Seite bieten diese Reaktionen signifikante Vorteile: Die Quantenzahlen der mitwirkenden Zustände können so gewählt werden, dass selektiv auf Übergänge mit $\Delta S = \Delta T = 1$ eingeschränkt wird, was zu einem klareren Spektrum führt, in dem der Untergrund stark reduziert ist. Mit geladenen Teilchen im Eingangs- und Ausgangskanal kann eine bessere Auflösung erzielt werden. Auf der anderen Seite bringen im Vergleich zu (p, n) und (n, p) Schwerionenreaktionen weitere Komplikationen mit sich: Zum einen muss die Reaktion von einstufigem Prozess dominiert sein und zum anderen nehmen, aufgrund der starken Absorption in Schwerionenreaktionen, nur die Teilchen in die Oberflächenregionen des Projektils und des Ziels an der Reaktion teil.

Laboratorien für solche experimentellen Untersuchungen sind weltweit vertreten. Dazu gehören die Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt, die Europäische Organisation für Kernforschung (CERN) bei Meyrin in der Schweiz, das Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL)

in Caen Frankreich, dem Vereinigtes Institut für Kernforschung in Dubna Russland, das Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN) bei Tokio in Japan, das National Superconducting Cyclotron Laboratory (NSCL) der Michigan State University in den Vereinigten Staaten von Amerika und viele weitere.

3

Greenfunktion in der nuklearen Vielteilchentheorie

Eine systematische und mikroskopische Untersuchung des β -Zerfalls benötigt eine detaillierte Kenntnis der Kernstruktur. Diese Kerne bilden in der Regel ein Vielteilchensystem, das nicht direkt gelöst werden kann. Ein Hilfsmittel um Vielteilchensysteme zu untersuchen bietet der Greenfunktionsformalismus, der nach dem Britischen Mathematiker George Green, welcher das Konzept 1830 entwickelt hat, benannt ist. Feynman, Dyson und Schwinger gelang es eine auf Greenfunktionen basierende Beschreibung der Quantenmechanik. In diesem Abschnitt wird der Formalismus vorgestellt.

Die Idee der Greenfunktionen, auch Korrelationsfunktionen genannt, beschreibt die Korrelationen zwischen zwei Zuständen des Systems in einem Vielkörpersystem. Ihre Anwendung findet man neben der Vielteilchenkernphysik auch in der Quantenfeldtheorie und in der Elektrodynamik. In diesem Kapitel soll dieses Konzept der Greenfunktion präsentieren werden. Für eine umfassende Einführung in das Feld wird dem Leser [27] und [21] nahe gelegt.

3.1 Einteilchen-Greenfunktion

Die Einteilchen-Greenfunktion ist als zeitgeordneter, normierter Erwartungswert eines Paares aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperator definiert:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{x}_2 t_2) = \frac{\langle \Psi_0 | T[\hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2 t_2)] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}.$$

Dabei ist $|\Psi_0\rangle$ der Heisenberg-Grundzustand des wechselwirkenden N-Teilchen Systems. Die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild im allgemeinen:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_2 t_2) &= \sum_k \Psi_{H\alpha k}(\mathbf{r}_2 t_2) \hat{a}_k \\ \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) &= \sum_k \Psi_{H\beta k}^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \hat{a}_k^\dagger \end{aligned}$$

erzeugen jeweils ein Teilchen bzw. ein Loch am Raumzeitpunkt $(\mathbf{r}_{1,2}, t_{1,2})$ im wechselwirkenden N-Körper-System. Hierbei sind die Koeffizienten $\Psi_{H\alpha k}(\mathbf{r}_2 t_2)$ die Einteilchenwellenfunktionen und die Summe geht über den kompletten Satz von Einteilchenquantenzahlen. Der Operator T ordnet die Feldoperatoren $\hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}_1 t_1)$ und $\hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2 t_2)$ in chronologischer zeitlicher Ordnung. Für zwei Heisenbergoperatoren lässt sich die Wirkung des Operators T wie folgt auswerten:

$$T[\hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2)] = \begin{cases} \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) & \text{for } t_1 > t_2 \\ \pm \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) & \text{for } t_2 > t_1 \end{cases},$$

wobei die Vorzeichen Plus und Minus sich jeweils auf Bosonen und Fermionen beziehen. Diese beiden Fälle lassen sich mit Hilfe der Heaviside-Funktion ausdrücken und ermöglichen eine von der zeitlichen Ordnung unabhängige Darstellung der Greenfunktion:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{x}_2t_2) = \Theta(t_1 - t_2) \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1t_1) \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2t_2) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \\ \pm \Theta(t_2 - t_1) \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2t_2) \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1t_1) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}.$$

Der Ausdruck zeigt, dass der erste Teil die Erzeugung eines zusätzlichen Teilchens am Raumzeitpunkt (r_2, t_2) und dessen Vernichtung bei (r_1, t_1) beschreibt. Wohingegen der zweite Teil die Propagation eines zusätzlichen Lochs, erzeugt am Raumzeitpunkt (r_1, t_1) und bei (r_2, t_2) vernichtet, beschreibt.

Um ein besseres Verständnis über die Eigenschaften der Greenfunktion zu bekommen, werden im Folgenden einige Umformungen der Operatoren und Symmetrieanforderungen für den Hamiltonoperator des Systems vorgenommen. Ein beliebiger Operator \hat{O}_S im Schrödinger-Bild lässt sich im Heisenberg-Bild durch:

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{O}_S e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}, \quad (3.1)$$

darstellen. Dieser Ausdruck bietet die Möglichkeit die Zeitabhängigkeit der Operatoren explizit auszunutzen. Die Anwendung auf die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren liefert:

$$\hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1t_1) = e^{\frac{i\hat{H}t_1}{\hbar}} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1) e^{-\frac{i\hat{H}t_1}{\hbar}}, \\ \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2t_2) = e^{\frac{i\hat{H}t_2}{\hbar}} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) e^{-\frac{i\hat{H}t_2}{\hbar}},$$

wobei $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)$ und $\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2)$ die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Schrödinger-Bild sind.

Betrachtet man die Wirkung des Hamiltonoperators auf den normierten Heisenberg-Grundzustand $|\Psi_0\rangle$, so erhält man die Eigenwertgleichung:

$$\hat{H}|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke und der Annahme eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators kann die Greenfunktion auf eine nur von der Differenz der Zeit abhängige Form reduziert werden:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{x}_2t_2) = \Theta(t_1 - t_2) e^{\frac{iE(t_1-t_2)}{\hbar}} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}_1) e^{-\frac{i\hat{H}(t_1-t_2)}{\hbar}} \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) | \Psi_0 \rangle \\ \pm \Theta(t_2 - t_1) e^{-\frac{iE(t_1-t_2)}{\hbar}} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) e^{-\frac{i\hat{H}(t_1-t_2)}{\hbar}} \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}_1) | \Psi_0 \rangle.$$

Mit dem aus der Quantenmechanik bekannten Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t_1, t_2) = e^{-\frac{i\hat{H}(t_1-t_2)}{\hbar}}$, der die Zeitentwicklung eines Anfangszustandes darstellt, erkennt man die physikalische Interpretation der Greenfunktion: Sie beschreibt die Erzeugung eines Teilchens bzw. eines Loches am Ort $\mathbf{r}_{2,1}$, dieses Teilchen bzw. Loch propagiert im Medium und wird bei $\mathbf{r}_{1,2}$ wieder vernichtet.

3.2 Lehmann Darstellung

In diesem Abschnitt werden allgemeine Eigenschaften der Einteilchen-Greenfunktion untersucht welche unabhängig von der spezifischen Form der Wechselwirkung sind und direkt von fundamentalen Eigenschaften der Quantenmechanik abhängen.

Mit der Voraussetzung eines normierten Grundzustands $|\Psi_0\rangle$ lässt sich die exakte Einteilchen-Greenfunktion vereinfacht darstellen:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{x}_2 t_2) = \langle \Psi_0 | T[\hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) \hat{\Psi}_{H\alpha}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2)] | \Psi_0 \rangle.$$

Ausgehend von dieser Form wird die Wirkung des T -Operators wie gewohnt durch die Heaviside-Funktion ausgedrückt und zusätzlich einen vollständigen Satz von Heisenberg-Zuständen zwischen den Feldoperatoren eingefügt:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{x}_2 t_2) = \sum_n \left\{ \Theta(t_1 - t_2) \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) | \Psi_0 \rangle \right. \\ \left. \pm \Theta(t_2 - t_1) \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_{H\alpha}(\mathbf{r}_1 t_1) | \Psi_0 \rangle \right\}.$$

Durch Umschreiben der Heisenberg-Operatoren O_H mit Hilfe der Relation (3.1) und der Annahme eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators, lässt sich die Zeitabhängigkeit aus den Matrixelementen ziehen:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{x}_2 t_2) = \sum_n \left\{ \Theta(t_1 - t_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E)(t_1 - t_2)} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}_1) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) | \Psi_0 \rangle \right. \\ \left. \pm \Theta(t_2 - t_1) e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E)(t_1 - t_2)} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}_1) | \Psi_0 \rangle \right\}.$$

In dieser Darstellung ist zu sehen, dass der Zustand $|\Psi_n\rangle$ Eigenzustand zu \hat{H} aus $N \pm 1$ Teilchen besteht, wenn der dazugehörige Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ N Teilchen besitzt. Für translationsinvariante Systeme folgt daraus, dass der Impulsoperator \hat{P} mit dem Hamiltonoperator \hat{H} kommutiert. Daher besitzen \hat{H} und \hat{P} einen vollständigen Satz von Eigenzuständen. Diese Systeme lassen sich durch eine Basis aus Ebene Wellen beschreiben:

$$\Psi_{ks}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_s.$$

Hierbei ist V das Volumen eines großen kubischen Kastens, welches das System umschließt. Am Ende der Rechnung wird der thermodynamische Grenzwert (Teilchenzahl, Volumen $\rightarrow \infty$) betrachtet. In der Standarddarstellung wird sie durch die Eigenzustände χ des Spinoperators σ_z beschrieben:

$$\hat{\sigma}_z \chi_\uparrow = +\chi_\uparrow \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_z \chi_\downarrow = -\chi_\downarrow.$$

Mit Hilfe des Translationsoperators $\hat{U}(\mathbf{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \hat{P}}$ kann nun die Ortsabhängigkeit der Feldoperatoren herausgezogen werden:

$$\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \hat{P}} \Psi_\alpha(0) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \hat{P}}.$$

Da $\hat{P}|\Psi_0\rangle = 0$ gilt, ist es möglich, die Ortsabhängigkeit aus den Matrixelementen herauszuziehen. Die Abhängigkeit der Greenfunktion reduziert sich auf zeit- und ortsunabhängige Matrixelemente:

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = & \sum_n \left\{ \Theta(t_1 - t_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E)(t_1 - t_2)} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \right. \\ & \times \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle \\ & \pm \Theta(t_2 - t_1) e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E)(t_1 - t_2)} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \\ & \left. \times \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_0 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Die Greenfunktion im Ortsraum ist daher nur noch von der Differenz der Orts- und Zeitvariablen $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ und $t_1 - t_2$ abhängig.

Für eine genauere Betrachtung der Eigenschaften der Greenfunktion wird im Folgenden die Greenfunktion im Impulsraum untersucht. Mit Hilfe der Integraldarstellung der Heaviside-Funktion Θ :

$$\Theta(t_1 - t_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega(t_1 - t_2)}}{\omega + i\eta}$$

kann die Fouriertransformierte $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d(t_1 - t_2) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\omega(t_1 - t_2)} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) \\
 &= V \sum_n \delta_{\mathbf{k}, \frac{\mathbf{p}_n}{\hbar}} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - \hbar^{-1}(E_n - E) + i\eta} \\
 &\quad + V \sum_n \delta_{\mathbf{k}, -\frac{\mathbf{p}_n}{\hbar}} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + \hbar^{-1}(E_n - E) - i\eta} \\
 &= V \sum_n \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - \hbar^{-1}(E_n - E) + i\eta} \\
 &\quad + V \sum_n \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | n - \mathbf{k} \rangle \langle n - \mathbf{k} | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + \hbar^{-1}(E_n - E) - i\eta}.
 \end{aligned}$$

Im Impulsraum reduziert sich die ω -Abhängigkeit auf den Nenner, welcher im Folgenden genauer betrachtet wird.

Im ersten Summanden besitzen die Zustände $|n\mathbf{k}\rangle$ $N + 1$ Teilchen, wenn der Grundzustand aus N Teilchen zusammengesetzt ist. Somit folgt für die Differenz $E_n - E$:

$$\begin{aligned}
 E_n - E &= E_n(N + 1) - E(N) \\
 &= \underbrace{(E_n(N + 1) - E(N + 1))}_{\epsilon_n(N+1)} + \underbrace{(E(N + 1) - E(N))}_{\mu}.
 \end{aligned}$$

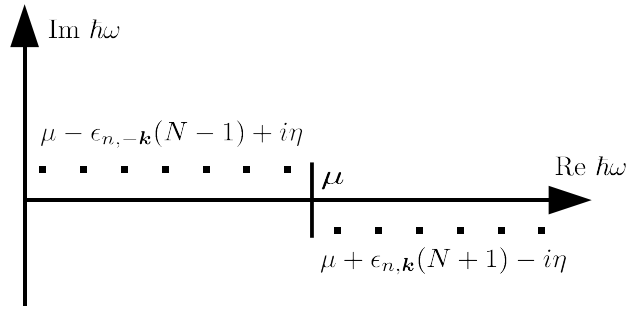
Die erste Klammer stellt die Anregungsenergie ϵ_n des $N + 1$ Teilchensystems dar. Wohingegen die zweite Klammer die Änderung der Grundzustandsenergie von einem N -Teilchen Systems zu einem $N + 1$ -Teilchen Systems, welches dem Chemischen Potential μ entspricht, angibt.

Analog zum Nenner des ersten Summanden lässt sich der Nenner des zweite Summanden der Greenfunktion untersuchen:

$$\begin{aligned}
 E_n - E &= E_n(N - 1) - E(N) \\
 &= \underbrace{(E_n(N - 1) - E(N - 1))}_{\epsilon_n(N-1)} + \underbrace{(E(N - 1) - E(N))}_{\mu},
 \end{aligned}$$

wobei hier ϵ_n die Anregungsenergie des $N - 1$ Teilchensystems darstellt.

Zusammenfassend lässt sich die Greenfunktion in der Lehmann-Darstellung


 Abbildung 3.1: Polstruktur der Greenfunktion $G(\mathbf{k}, \omega)$.

schreiben:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \hbar V \sum_n \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu - \epsilon_{n,\mathbf{k}}(N+1) + i\eta} + V \sum_n \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) | n - \mathbf{k} \rangle \langle n - \mathbf{k} | \hat{\Psi}_\alpha(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu + \epsilon_{n,-\mathbf{k}}(N-1) - i\eta}.$$

Die ausschlaggebende Beobachtung unserer Untersuchung ist, dass Polstellen die Greenfunktion im Impulsraum mit den exakten Anregungsenergien des wechselwirkenden Systems identifiziert werden können.

3.3 Störungsrechnung

Im vorherigen Abschnitt wurde die Einteilchen-Greenfunktion eingeführt und ihre allgemeinen Eigenschaft näher untersucht. Ihre physikalische Interpretation und ihre Nützlichkeit bei der Berechnung des Anregungsspektrums wechselwirkender Systeme wurde aufgezeigt. Die Einführung der Greenfunktion vereinfacht nicht den rechnerischen Aufwand der zur Untersuchung nichttrivialer physikalischer Probleme benötigt wird. Eine Lösung dieses Problems erhält man durch die Entwicklung der Greenfunktion mit Hilfe der Störungstheorie. Eine genaue Herleitung der störungstheoretischen Entwicklung der Greenfunktion kann in der Standardliteratur zur Quantenmechanik von Vielkörperproblemen gefunden werden (Beispielsweise: [27] oder [21]). Im Folgenden werden einige Ergebnisse dieser Herleitung vorgestellt.

Ausgangspunkt einer störungstheoretischen Betrachtung der Greenfunktion ist die Idee eines adiabatischen Einschaltens der Wechselwirkung. Dies liefert ein Verfahren die exakten Eigenzustände des wechselwirkenden Systems aus den, als bekannt vorausgesetzten Eigenzuständen, des nichtwechselwirkenden Systems zu bestimmen. Dieser Ansatz wird durch die Einführung eines neuen

zeitabhängigen Hamiltonoperators \hat{H} realisiert:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + e^{-\epsilon|t|}\hat{H}_1. \quad (3.2)$$

Dabei ist \hat{H}_0 der Hamiltonopererator des nichtwechselwirkenden Systems. Der Hamiltonoperator des wechselwirkenden Systems \hat{H}_1 wird mit Hilfe des Parameters ϵ adiabatisch eingeschaltet.

Zu Zeiten weit in der Vergangenheit und weit in der Zukunft reduziert sich der Hamiltonoperator \hat{H} auf den Hamiltonoperator des ungestörten Systems \hat{H}_0 . Zur Zeit $t = 0$ entspricht \hat{H} dem Hamiltonoperator des gesamten wechselwirkenden Systems. Lässt man am Ende der Rechnung den Grenzwert von ϵ gegen Null gehen, erhält man eine Lösung für den Hamiltonoperator. Das Problems kann durch die Transformation ins Wechselwirkungsbild gelöst werden.

Der Hamiltonoperator (3.2) beschreibt ein zeitabhängiges Problem, dessen Zustände im Wechselwirkungsbild $|\Psi_I(t)\rangle$ mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}_\epsilon(t, t_0)$ aus den Zuständen zum Zeitpunkt t_0 bestimmt werden können:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_\epsilon(t, t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle.$$

Dabei ist der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_\epsilon(t, t_0)$ durch:

$$\hat{U}_\epsilon(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)} T[\hat{H}_1(t_1) \cdots \hat{H}_1(t_n)]$$

gegeben. Durch Annähern des Zeitpunkts t_0 gegen ∞ reduziert sich \hat{H} zu \hat{H}_0 und es gilt:

$$|\Psi_H\rangle = |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Phi_0\rangle.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man die Einteilchen-Greenfunktion G im Wechselwirkungsbild darstellen:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)} \\ \times \frac{\langle \Phi_0 | T[\hat{H}_1(t_1) \cdots \hat{H}_1(t_n) \Psi(\mathbf{r}_1, t_1) \Psi^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2)] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \hat{U}_\epsilon(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle}.$$

Der divergente Faktor $e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)}$ taucht sowohl im Zähler als auch im Nenner auf und kann durch Kürzen beseitigt werden. Für den resultierenden Ausdruck wird der Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ genommen und man erhält eine Lösung für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ des gesamten wechselwirkenden Systems.

Der Ausdruck der Einteilchen-Greenfunktion $G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2)$ stellt eine Reihe von vollständig kontrahierten Produkten von Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild dar, welche einer Entwicklung nach der ungestörten Einteilchen-Greenfunktion $G^0(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2)$ entspricht. Mit Hilfe des Wick-Theorems (siehe [23]) lässt sich eine Entwicklung des Ausdrucks berechnen:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2) + G_{\alpha\beta}^1(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2, t_2) + O(n = 2)$$

Die ersten beiden Beiträge sind durch:

$$iG_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \Phi_0 | T[\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2 t_2)] | \Phi_0 \rangle$$

und

$$iG_{\alpha\beta}^1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{\hbar} \int d^4 r'_1 d^4 r'_2 [G_{\alpha\lambda}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)_{\lambda\lambda', \mu\mu'} G_{\lambda'\beta}^0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) G_{\mu'\mu}^0(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_2) \\ G_{\alpha\lambda}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)_{\lambda\lambda', \mu\mu'} G_{\lambda'\mu}^0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) G_{\mu'\beta}^0(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2)]$$

gegeben. Diese Ausdrücke können durch Verwendung der Feynmanregeln, welche jedem Term der Entwicklung ein Diagrammen zuordnet, mit einer physikalische Interpretation verknüpft werden. Unter Verwendung der Feynmanregeln erhält man somit für die Einteilchen-Greenfunktion bis zur ersten Ordnung (n=1):

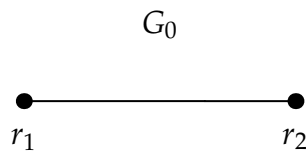


Abbildung 3.2: Feynman-Diagramm der ungestörten Einteilchen-Greenfunktion G^0 .

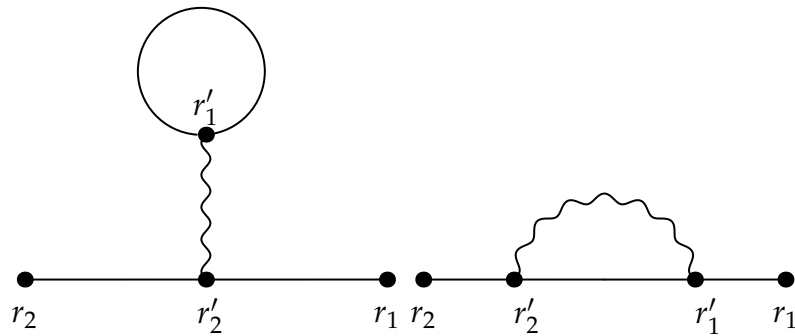


Abbildung 3.3: Erste Ordnung Feynman-Diagramme G^1 .

3.4 Selbstenergie

Eine genauere Betrachtung der Feynman-Diagramme zeigt, dass die exakte Einteilchen-Greenfunktion $G_{\alpha\beta}(r_1t_1, r_2t_2)$ aus der Summe der ungestörten Greenfunktion $G_{\alpha\beta}^0(r_1t_1, r_2t_2)$ und allen verbundenen Termen mit ungestörten Greenfunktionen am Ende besteht. Die Beiträge dieser Terme mit ungestörten Greenfunktionen am Ende, welche eine Wechselwirkung des Systems mit sich selbst beschreiben und einen Anteil zur Teilchenenergie bzw. zur effektiven Masse beitragen, werden zusammengefasst Selbstenergie Σ genannt. Die Einführung der Selbstenergie ermöglicht eine kompakte Darstellung der Entwicklung für die exakte Einteilchen-Greenfunktion in Form der Dyson-Gleichung:

$$G_{\alpha\beta}(r_1t_1, r_2t_2) = G_{\alpha\beta}^0(r_1t_1, r_2t_2) + \int d^4r'_1 \int d^4r'_2 G_{\alpha\lambda}^0(r_1t_1, r'_2t'_2) \Sigma(r'_2t'_2, r'_1t'_1)_{\lambda\mu} G_{\mu\beta}^0(r'_1t'_1, r_2t_2).$$

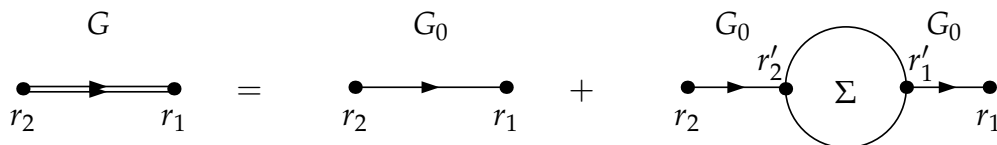


Abbildung 3.4: Dyson-Gleichung für $G_{\alpha\beta}$.

Die Untersuchung der Selbstenergie zeigt, dass diese in verschiedene Beiträge von Diagrammen aufgeteilt werden kann. Es zeigt sich, dass die Selbstenergie des Systems in eine Summe von Beiträgen aus Selbstenergieeinschüben, welche nicht in zwei Teile durch Schnitt einer Einteichenlinie geteilt werden können, reduziert werden kann. Über diese irreduzible Selbstenergieeinschübe Σ^* kann die vollständige Selbstenergie Σ berechnet werden:

$$\Sigma(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \Sigma^*(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) + \int d^4 r'_1 \int d^4 r'_2 \Sigma^*(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}'_1 t'_1) G^0(\mathbf{r}_2 t_2, \mathbf{r}'_2 t'_2) \Sigma^*(\mathbf{r}'_2 t'_2, \mathbf{r}_2 t_2) + \dots$$

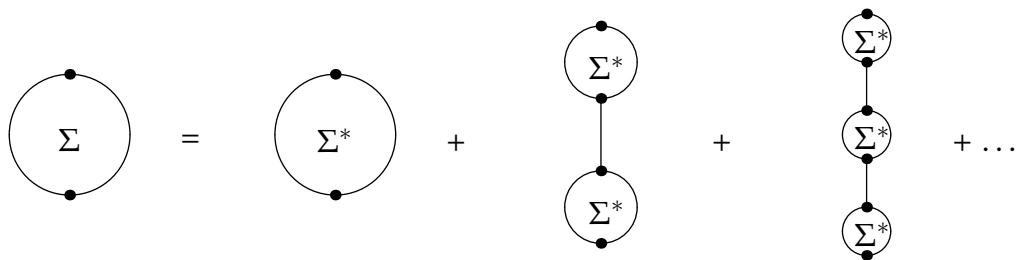


Abbildung 3.5: Selbstenergie Σ als Summe von irreduziblen Selbstenergieeinschüben Σ^* .

Mit Hilfe der irreduziblen Selbstenergieeinschüben lässt sich die Dyson-Gleichung zur Berechnung der exakten Greenfunktion in einer Integralform schreiben:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) + \int d^4 r'_1 \int d^4 r'_2 G_{\alpha\lambda}^0(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}'_1 t'_1) \Sigma^*(\mathbf{r}'_1 t'_1, \mathbf{r}'_2 t'_2)_{\lambda\mu} G_{\mu\beta}(\mathbf{r}'_2 t'_2, \mathbf{r}_2 t_2).$$

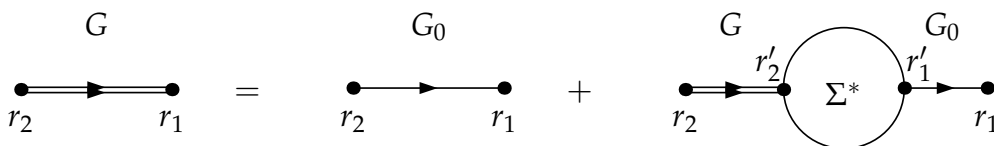


Abbildung 3.6: Dyson Gleichung für $G_{\alpha\beta}$ mit irreduziblen Selbstenergieeinschüben Σ^* .

Eine einfachere Darstellung der Dyson-Gleichung erhält man mit der Annahme eines translationsinvarianten Systems. In diesem Fall reduziert sich die Abhängigkeit der Greenfunktion und der Selbstenergie auf die Differenz der Orts- und Zeitvariablen $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ und $t_1 - t_2$ und es ist möglich die vierdimensionale Fouriertransformation durchzuführen. Unter Verwendung der Relation:

$$\Sigma^*(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\omega(t_1 - t_2)} \Sigma^*(\mathbf{k}\omega)_{\alpha\beta},$$

erhält man für die Dyson-Gleichung im Impulsraum:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega) = G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}\omega) + G_{\alpha\lambda}^0(\mathbf{k}\omega) \Sigma^*(\mathbf{k}\omega)_{\lambda\mu} G_{\mu\beta}^0(\mathbf{k}\omega).$$

In der Regel sind die Matrizen $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}^0$ und $\Sigma_{\alpha\beta}^*$ diagonal:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega) = \delta_{\alpha\beta} G(\mathbf{k}\omega)$$

$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}\omega) = \delta_{\alpha\beta} G^0(\mathbf{k}\omega)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}\omega) = \delta_{\alpha\beta} \Sigma^*(\mathbf{k}\omega)$$

und man erhält durch Auflösen nach $G(\mathbf{k}\omega)$ eine Lösung für die Dyson-Gleichung:

$$G(\mathbf{k}\omega) = \frac{1}{[G^0(\mathbf{k}\omega)]^{-1} - \Sigma^*(\mathbf{k}\omega)}.$$

Mit Hilfe der Lehmann-Darstellung kann die Inverse der ungestörten Greenfunktion $G^0(\mathbf{k}\omega)$ ermittelt werden:

$$[G^0(\mathbf{k}\omega)]^{-1} = \omega - \hbar^{-1} \epsilon_k.$$

Somit folgt für die Einteilchen-Greenfunktion als Lösung der Dyson-Gleichung:

$$G(\mathbf{k}\omega) = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\omega - \hbar^{-1} \epsilon_k - \Sigma^*(\mathbf{k}\omega)}.$$

3.5 Polarisation

Eine im vorangegangenen Abschnitt zur Greenfunktion analoge Untersuchung der Wechselwirkung zeigt, dass die Wechselwirkung zweier Teilchen, vergleichbar mit der Greenfunktion, in eine Summe aus der Wechselwirkung niedrigster Ordnung mit einer Reihe aus Termen verbundener Diagramme mit ein- und auslaufender Wechselwirkung niedrigster Ordnung geschrieben werden kann.

Die Terme mit verbundenen Diagrammen stellen sogenannte Polarisationseinschübe Π des Mediums dar und führen zu einer kompakten Schreibweise für die gesamte Wechselwirkung $U(q)_{\alpha\beta,\rho\tau}$:

$$U(q)_{\alpha\beta,\rho\tau} = U_0(q)_{\alpha\beta,\rho\tau} + U_0(q)_{\alpha\beta,\mu\nu} \Pi(q)_{\mu\nu,\eta\lambda} U_0(q)_{\eta\lambda,\rho\tau}. \quad (3.3)$$

$U_0(q)$ ist hierbei die Wechselwirkung in niedrigster Ordnung.

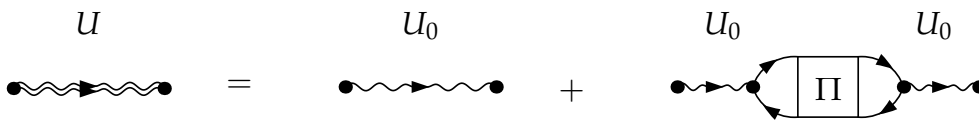


Abbildung 3.7: Dyson-Gleichung für die effektive Wechselwirkung $U(q)_{\alpha\beta,\rho\tau}$.

Analog zur Betrachtung der Selbstenergieeinschübe werden nichtreduzierbare Polarisationseinschübe Π^* , die nicht durch Trennung einer einzigen Wechselwirkungslinie in Polarisationseinschüben geteilt werden können, eingeführt.

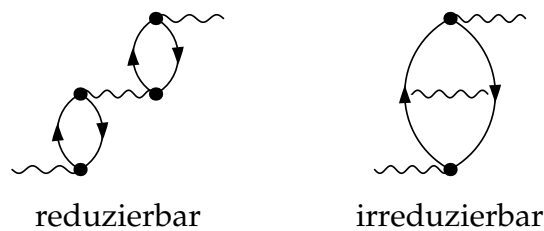


Abbildung 3.8: Feynman-Diagramm von Polarisationseinschüben.

Mit dieser Hilfe lässt sich die effektive Wechselwirkung $U(q)_{\alpha\beta,\rho\tau}$ durch die Dyson-Gleichung darstellen:

$$U(q)_{\alpha\beta,\rho\tau} = U_0(q)_{\alpha\beta,\rho\tau} + U_0(q)_{\alpha\beta,\mu\nu} \Pi^*(q)_{\mu\nu,\eta\lambda} U(q)_{\eta\lambda,\rho\tau}. \quad (3.4)$$

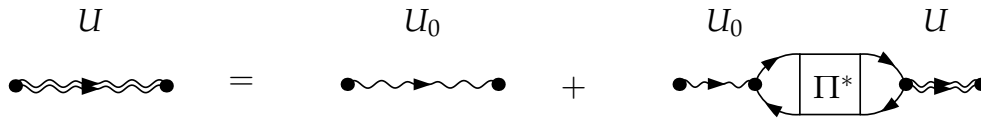


Abbildung 3.9: Dyson Gleichung für die effektive Wechselwirkung U .

Im Allgemeinen besitzen die Gleichungen (3.4) und (3.3) eine komplizierte Matrixstruktur. Im Folgenden wird der vereinfachten Fall einer spinunabhängigen Wechselwirkung betrachtet:

$$U_0(q)_{\alpha\beta,\rho\tau} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\tau}U_0(q).$$

Für die Gesamtwechselwirkung U folgt daraus aus der Dyson-Gleichung:

$$\begin{aligned} U(q) &= U_0(q) + U_0(q)\Pi_{\alpha\alpha,\lambda\lambda}(q)U_0(q) \\ U(q) &= U_0(q) + U_0(q)\Pi_{\alpha\alpha,\lambda\lambda}^*(q)U(q), \end{aligned}$$

welche sich nach der Gesamtwechselwirkung U auflösen lässt:

$$U(q) = \frac{U_0(q)}{1 - \Pi^*(q)U_0(q)}.$$

Diese Lösung beschreibt den Aufbau der Gesamtwechselwirkung U durch die Wechselwirkung niedrigster Ordnung U_0 und durch die allgemeine dielektrische Polarisation des Mediums $1 - \Pi^*U_0(q)$

3.6 Kollektive Anregungen

Genauere Betrachtungen der Anregungsspektren von Kernen zeigen, dass neben Anregungen von Einteilchen-Zuständen, welche auf Kerne in der Nähe abgeschlossener Schalen beschränkt sind, zusätzlich noch kollektive Freiheitsgrade beobachtbar sind. Diese kollektiven Anregungen, welche sich mit Ausnahme von sehr leichten Kernen beobachten lassen, können mit Hilfe von Dichtefluktuationen und Formfluktuationen des Kerns beschrieben werden. In diesem Abschnitt werden diese kollektiven Anregungen mit Mitteln der Quantenfeldtheorie untersucht und eine Möglichkeit gesucht diese Anregungsenergien zu berechnen.

Es wird angenommen, dass das wechselwirkende System mit dem zeitunabhängigen Hamiltonoperator \hat{H} beschrieben wird, dessen Eigenfunktionen bekannt seien, d.h. die Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_s(t)\rangle = \hat{H}_S |\Psi_s(t)\rangle$$

mit

$$|\Psi_s(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi_s(0)\rangle$$

bekannt sei. Wenn davon ausgegangen wird, dass zum Zeitpunkt $t = t_0$ der Hamiltonoperator durch eine zusätzliche zeitabhängige Störung \hat{H}^{ex} erweitert wird, erhält man für die Wellenfunktion des gestörten Systems die erweiterte Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}_s(t)\rangle = (\hat{H}_S + \hat{H}^{ex}) |\bar{\Psi}_s(t)\rangle \quad (3.5)$$

mit dem Störungsterm:

$$\hat{H}^{ex} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) V^{ex}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Hierbei ist $V^{ex}(\mathbf{r}, t)$ das externe Störpotential. Mit der Lösung $|\Psi_s(t)\rangle$ für das ungestörte Problem setzt man für die Wellenfunktion des gestörten Systems:

$$|\bar{\Psi}_s(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{A}(t) |\Psi_s(0)\rangle$$

als Ansatz an. Hierbei beschreibt $\hat{A}(t)$, die anfänglich unbekannte Wirkung der Störung auf das System. Einsetzen dieses Ansatzes in die Schrödinger-Gleichung des gestörten Systems (3.5), ergibt eine Differentialgleichung für $\hat{A}(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) = \underbrace{e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{H}^{ex}(t) e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}}_{\hat{H}_H^{ex}(t)} \hat{A}(t).$$

Mit den Randbedingungen $\hat{A}(t) = 1$ für $t \leq t_0$ kann diese Gleichung iterativ gelöst werden:

$$\hat{A}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ex}(t') + \dots$$

Für die Wellenfunktion $|\bar{\Psi}(t)\rangle$ erhält man somit:

$$|\bar{\Psi}(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi_s(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ex}(t') |\Psi_s(0)\rangle + \dots$$

Alle interessanten physikalischen Größen lassen sich durch Matrixelemente von Operatoren \hat{O}_S im Schrödinger Bild darstellen:

$$\begin{aligned}\langle \hat{O}(t) \rangle_{ex} &= \langle \bar{\Psi}'_S(t) | \hat{O}_S(t) | \bar{\Psi}_S(t) \rangle \\ &= \langle \bar{\Psi}'_S(t) | \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ex}(t') + \dots \right) e^{\frac{i\hat{H}_S t}{\hbar}} \hat{O}_S(t) e^{-\frac{i\hat{H}_S t}{\hbar}} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_H^{ex}(t') + \dots \right) | \Psi_S(t) \rangle \\ &= \langle \bar{\Psi}'_H(0) | \hat{O}_H(t) | \bar{\Psi}_H(0) \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \bar{\Psi}'_H(0) | \int_{t_0}^t dt' [\hat{H}_H^{ex}(t'), \hat{O}_H(t)] | \bar{\Psi}_H(0) \rangle + \dots\end{aligned}$$

Wenn $|\bar{\Psi}'_H(0)\rangle$ und $|\bar{\Psi}_H(0)\rangle$ den normierten Grundzustand bezeichnen, dann kann der zweite Summand als lineare Antwort des Systems auf die Störung interpretiert werden:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle_{ex} - \langle \hat{O}(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \bar{\Psi}'_H(0) | \int_{t_0}^t dt' [\hat{H}_H^{ex}(t'), \hat{O}_H(t)] | \bar{\Psi}_H(0) \rangle.$$

In endlichen Systemen kann gezeigt werden, dass die Antwort des Systems auf die Störung durch den Dichtekorrelations- bzw. den Polarizationspropagator beherrscht wird. Für endliche Systeme ist Π durch:

$$\begin{aligned}i\Pi(\mathbf{x}_1 t_1, \mathbf{x}_2 t_2) &= \langle \Psi_0 | T \left[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\Psi}(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}_2 t_2) \hat{\Psi}(\mathbf{x}_2 t_2) \right] | \Psi_0 \rangle \\ &= \sum_{\lambda\mu;\alpha\beta} \phi_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) \phi_\lambda(\mathbf{x}_1) \phi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_2) \phi_\beta(\mathbf{x}_2) \\ &\quad \times i \langle \Psi_0 | T \left[c_{H\mu}^\dagger(t_1) c_{H\lambda}(t_1) c_{H\alpha}^\dagger(t_2) c_{H\beta}(t_2) \right] | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | T [\hat{\rho}(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\rho}(\mathbf{x}_2 t_2)] | \Psi_0 \rangle\end{aligned}$$

mit dem Dichteoperator $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}t) = \sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \phi_\beta(\mathbf{x}) c_{H\alpha}^\dagger(t) c_{H\beta}(t).$$

Nach Auswertung des Zeitordnungsoperators erhält man:

$$\begin{aligned}i\Pi_{\lambda\mu;\alpha\beta}(t_1 - t_2) &= \Theta(t_1 - t_2) \langle \Psi_0 | \hat{\rho}(\mathbf{x}_1 t_1) \hat{\rho}(\mathbf{x}_2 t_2) | \Psi_0 \rangle \\ &\quad + \Theta(t_2 - t_1) \langle \Psi_0 | \hat{\rho}(\mathbf{x}_2 t_2) \hat{\rho}(\mathbf{x}_1 t_1) | \Psi_0 \rangle.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck beschreibt die lineare Antwort für eine äußere Störung der Form (3.6) in RPA. Er ermöglicht es Anregungen von Kernzuständen durch Elektronenstreuung, hochenergetischer Kernstreuung oder durch die schwache Wechselwirkung zu untersuchen.

4

Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

4.1 Effektive Wechselwirkung im Kern

Einteilchenmodelle, wie beispielsweise das Schalenmodell der unabhängigen Nukleonen, die sich in einem mittleren stationären Kernpotential bewegen, bieten ein mächtiges Werkzeug zur Untersuchung der Kernstruktur, besitzen aber auch ernsthafte Mängel.

Spektrale Eigenschaften von Kernen zeigen die Notwendigkeit, zusätzliche Korrelationen zu berücksichtigen. Betrachtet man beispielsweise den Gesamtdrehimpuls eines sphärischen Kerns genauer, so lassen sich Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Beschreibung mit Hilfe von Einteilchenmodellen und dem Experiment finden.

Sei φ_{njm} ein Einteilchenzustand mit guten Drehimpulsquantenzahlen, wobei n alle Nicht-Drehimpulsquantenzahlen beschreibt. Die Menge aller Zustände mit $m = -j \dots j$ bezeichnet man als j -Schale. Für eine vollständig gefüllte j -Schale, alle unterschiedlichen m aufgefüllt, gilt im Einteilchenmodell als Folge der Rotationsinvarianz im Raum der m -Zustände, dass der Gesamtdrehimpuls der Nukleonen zu Null koppelt. Ist die j -Schale nur teilweise besetzt, so kann der Gesamtdrehimpuls der Nukleonen, je nach Abhängigkeit der Kopplung, unterschiedliche Werte annehmen. Da im Einteilchenmodell die Gesamtenergie gleich der Summe der Einteilchenenergien entspricht ist die Gesamtenergie kopplungsunabhängig und man erhält eine Entartung der unterschiedlichen Gesamtdrehimpulse. Diese Entartung des Grundzustands kann experimentell nicht bestätigt werden, was zu der Annahme einer Restwechselwirkung führt.

Ausgehend vom Hamiltonoperator des Systems:

$$H = T + V_{ij}$$

wird dieser in einen Mittelfeldanteil $H_0 = T + U$ und eine Restwechselwirkung V_{res} aufgespalten:

$$H = H_0 + V_{res}$$

Der Mittelfeldanteil H_0 beschreibt hierbei den Beitrag der Einteilchenwechselwirkung am System. Im Grundzustand soll dieser Mittelfeldanteil die Grundzustandsenergie E_0 beschreiben:

$$\langle 0|H|0\rangle = E_0 \stackrel{!}{=} \langle 0|H_0|0\rangle,$$

was zu dem Verschwinden der Restwechselwirkung im Grundzustand führt:

$$\langle 0|V_{res}|0\rangle = 0.$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Transformation der Zustände $\langle 0| \rightarrow \langle 0'|$ erreicht werden. Diese Transformation spiegelt sich zusätzlich im Hamiltonoperator wieder:

$$\begin{aligned} H_0 &\rightarrow H'_0 \\ &= H_0 + V_P \\ V_{res} &\rightarrow V'_{res}. \end{aligned}$$

In den folgenden Unterabschnitten wird zunächst die Dichtefunktionaltheorie zur Bestimmung von effektiven in-medium Wechselwirkung vorgestellt. Anschließend werden zwei übliche Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen vorgestellt, bevor näher auf die Paarwechselwirkung eingegangen wird.

4.1.1 Dichtefunktionaltheorie

Die Dichtefunktionaltheorie (DFT) ermöglicht es das Vielteilchenproblem mit Hilfe von Energiedichtefunktionalen zu behandeln und ist dabei durch eine ausreichende Genauigkeit und einfache Berechnungskomplexität geprägt. Neben der Hartree-Fock-Theorie, welche in der Standardliteratur zur Quantenmechanik [53] ausführlich behandelt wird, findet die DFT in den letzten Jahrzehnten wachsende Anwendung in der Vielteilchenphysik wie beispielsweise in der Festkörperphysik und Kernphysik. Für eine umfassende Einführung in dieses Feld wird dem Leser [2] und [22] nahe gelegt.

Ausgangspunkt ist der Vielteilchenhamiltonoperator für ein System mit N Teilchen:

$$H = T + U + V,$$

mit der kinetischen Energie T , der Einteilchenwechselwirkung U und einem äußeren Wechselwirkung $V = \sum_i^N v(r_i)$.

Betrachtet man das Großkanonische Potential Ω des Systems, so kann dies als Funktional des chemischen Potentials μ , der Temperatur T und dem externen Potential $v(\mathbf{r})$ geschrieben werden:

$$\Omega = \Omega(\mu, T, [v(\mathbf{r})]).$$

Die gesuchte Dichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ des Systems kann hierbei durch funktionale Ableiten nach dem äußere Potential bestimmt werden:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\delta\Omega}{\delta v(\mathbf{r})}.$$

Im Folgenden wird zur Einfachheit das chemische Potential auf $\mu = 0$ gesetzt und der Tieftemperatur Grenzfall $T \rightarrow 0$ genommen.

Das Ziel der DFT ist es die Abhängigkeit vom äußeren Potential $v(\mathbf{r})$ durch die der Dichte $\rho(\mathbf{r})$ zu ersetzen. Hierfür wird zunächst mit Hilfe einer Legendre-Transformation die von der Dichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ abhängige Hohenberg-Kohn Freien Energie [36] bestimmt:

$$F_{HK}[\rho(\mathbf{r})] = \Omega[v(\mathbf{r})] - \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}).$$

Mit Hilfe einer weiteren Legendre-Transformation kann nun ein von der Dichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ abhängiges Großkanonisches Potential $\Omega = \Omega([\rho(\mathbf{r})])$ bestimmt werden:

$$\Omega[\rho(\mathbf{r})] = F_{HK}[\rho(\mathbf{r})] - \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}).$$

Damit dieses neue Großkanonische Potential $\Omega[\rho(\mathbf{r})]$ dem ursprünglichen Großkanonischen Potential $\Omega = \Omega([v(\mathbf{r})])$ entspricht muss die Bedingung:

$$\frac{\delta F_{HK}}{\delta \rho(\mathbf{r})} = -v(\mathbf{r})$$

erfüllt werden. Das Vielteilchenproblem reduziert sich nun auf die Bestimmung der Hohenberg-Kohn Freien Energie. Ein üblicher Ansatz für F_{HK} ist:

$$F_{HK} = T[\rho(\mathbf{r})] + E_0[\rho(\mathbf{r})] + E_{ex}[\rho(\mathbf{r})]$$

mit dem kinetischen Energie $T[\rho]$, der Einteilchenenergie $E_0[\rho]$ und der Austauschkorrelationsenergie $E_{ex}[\rho]$. Jeder einzelne Term ist hierbei ein Funktional der unabhängigen Variable $\rho(\mathbf{r})$. Bis auf den direkt Term der Einteilchenenergie $E_0[\rho]$ benötigen die Terme eine Lösung des quantenmechanischen Problems, so benötigt man für die kinetischen Energie $T[\rho]$ ein volles Kenntnis über das quantenmechanische nicht wechselwirkende System und die Austauschkorrelationsenergie $E_{ex}[\rho]$ benötigt sogar die Information über die gesamte Vielteilchenphysik.

Zum lösen diese Problems bieten sich zwei Verfahren an: Zum einen das von Thomas [56] und Fermi [25],[26] in den späten 1920ern formulierte Model. Hierbei wird für die kinetische Energie T eine lokale Dichtenäherung angenommen und die Austauschkorrelationsenergie $E_{ex}[\rho]$ vernachlässigen. Dieses Modell findet Anwendung für Systeme mit sehr hoher Dichte und in astrophysikalischen Anwendungen. Zum anderen das 1965 von Kohn und Sham [42] entwickelte Model, welches ein effektives Potential $v_{eff}(\mathbf{r})$ einführen, um die Schrödinger Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + v_{eff}(\mathbf{r}) \right) \Psi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \Psi_i(\mathbf{r})$$

zu lösen. Hiermit erhält man für die Dichte:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N |\Psi_i(\mathbf{r})|^2$$

und die kinetisch Energie:

$$T[\rho(\mathbf{r})] = \sum_i^N \epsilon_i - \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) v_{eff}(\mathbf{r}).$$

In praktischen Anwendungen ist das effektive Potential $v_{eff}(\mathbf{r})$ und die Dichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ unbekannt und kann über das bekannte äußere Potential $v_0(\mathbf{r})$ und das Austauschkorrelationspotential:

$$v_{ex}(\mathbf{r}) = - \frac{\delta E_{ex}[\rho(\mathbf{r})]}{\delta \rho(\mathbf{r})}$$

bestimmt werden:

$$v_{eff}(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) + v_0(\mathbf{r}) + v_{ex}(\mathbf{r}).$$

Zu Behandlung von kernphysikalischen Problemen bietet sich als Ansatz für die Energiedichte ein Funktional in Abhängigkeit von der kinetischen Dichte τ , der Teilchendichte ρ und der Paardichte κ der Form:

$$E[\tau, \rho, \kappa] = \sum_{q=p,n} T_q + \frac{1}{2} \sum_{qq'} V_{qq'} \rho_q \rho_{q'} + \frac{1}{2} \sum_q U_{qq} \kappa_q \kappa_q$$

an.

4.1.2 Nukleare Dichtefunktionale

Skyrme Wechselwirkung

Ein weitverbreitetes Dichtefunktional ist das Skyrme-Funktional effektiven Wechselwirkungen ist die sogenannte Skyrme-Wechselwirkung. Es kann durch eine effektive dichte- und impulsabhängige Wechselwirkung ausgedrückt werden, die ursprünglich von Skyrme [55] Ende der 1950er Jahre aufgestellt wurde. Mit ihrer einfachen analytischen Struktur findet sie starke Anwendung in selbstkonsistenten Mittelfeldtheorien. Sie besitzt relativ wenige Parameter, welche durch Anpassung an physikalische Eigenschaften (Beispielsweise: der Sättigung von Kernmaterie, Bindungsenergien ausgewählter Kerne und weiteren einfachen experimentellen Kerneigenschaften) bestimmt werden. Seit der ursprünglichen Formulierung hat es eine kontinuierliche Entwicklung in der Formulierung

der Skyrme Wechselwirkung gegeben, welche erfolgreiche für Anwendung Kerne der gesamten Nuklidkarte finden. Eine Einführung in die Skyrme Wechselwirkung kann in [17] gefunden werden.

Die meisten skyrmeartigen Wechselwirkungen lassen sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = & t_0(1 + x_0P_\sigma)\delta(\mathbf{r}) \\
 & + \frac{1}{2}t_1(1 + x_1P_\sigma) \left[\mathbf{P}'^2\delta(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r})\mathbf{P}^2 \right] \\
 & + t_2(1 + x_2P_\sigma)\mathbf{P}'\delta(\mathbf{r})\mathbf{P} \\
 & + \frac{1}{6}(1 + x_3P_\sigma)[\rho(\mathbf{R})]^\sigma\delta(\mathbf{r}) \\
 & + iW_0\sigma \left[\mathbf{P}' \times \delta(\mathbf{r})\mathbf{P} \right]
 \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \\
 \mathbf{R} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \\
 \mathbf{P} &= \frac{1}{2i}(\nabla_1 - \nabla_2)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2, \\
 P_\sigma &= \frac{1}{2}(1 + \sigma_1\sigma_2).
 \end{aligned}$$

\mathbf{P}' ist das hermitischkonjugierte von \mathbf{P} und wirkt somit nach links. Hierbei ist das Potential durch einem zentralen Term (erster Summand), einem nichtlokalen Term (dritter Summand), einem von der Dichte abhängigen Term (vierter Summand) und einen Spin-Bahn Term (fünfter Summand) aufgebaut. Das Energiedichtefunktional der Skyrme Wechselwirkung ergibt:

$$H = T + H_0 + H_3 + H_{eff} + H_{fin} + H_{so} + H_{sg} + H_{Coul}$$

mit der kinetischen Energie $T = \frac{\hbar}{2m}\tau$ (τ ist hierbei die kinetische Dichte), dem Nullreichweitenterm H_0 , dem dichteabhängigen Term H_3 , dem effektiven Massenterm H_{eff} , dem begrenzten Bereichs-Term H_{fin} , dem Spin-Bahn Term H_{so} ,

dem Spin-Gradient Kopplungsterm H_{sg} und dem Coulomb-Term H_{Coul} :

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{1}{4}t_0 \left[(2 + x_0)\rho^2 - (2x_0 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2) \right], \\
 H_3 &= \frac{1}{24}t_3\rho^\sigma \left[(2 + x_3)\rho^2 - (2x_3 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2) \right], \\
 H_{eff} &= \frac{1}{8} [t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)] \tau\rho \\
 &\quad + \frac{1}{8} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)] (\tau_p\rho_p + \tau_n\rho_n), \\
 H_{fin} &= \frac{1}{32} [3t_1(2 + x_1) - t_2(2 + x_2)] (\nabla\rho)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{32} [3t_1(2x_1 + 1) + t_2(2x_2 + 1)] [(\nabla\rho_p)^2 + (\nabla\rho_n)^2], \\
 H_{so} &= \frac{1}{2}W_0 \left[J\nabla\rho + J_p\nabla\rho_p + J_n\nabla\rho_n \right], \\
 H_{sg} &= -\frac{1}{16}(t_1x_1 + t_2x_2)J^2 + \frac{1}{16}(t_1 - t_2) \left[J_p^2 + J_n^2 \right],
 \end{aligned}$$

mit der Spin-Stromdichte $J_{p,n}$ und $J = J_p + J_n$ und der kinetischen Energiedichte $\tau_{p,n}$, die jeweils durch die Wellenfunktionen und deren Ableitung ausgedrückt werden kann.

D3Y-Wechselwirkung

Eine weitere in der Streutheorie weit verbreitete effektive in-medium Wechselwirkung ist die Michigan Version der Wechselwirkung (M3Y-Wechselwirkung) [8]. Diese Wechselwirkung ist durch den Fit von Yukawa-Funktionen an die aus der Reid soft-core Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung [51] erhaltenen G-Matrixelemente abgeleitet worden, so dass die Grundzustandseigenschaften von ^{16}O reproduziert werden. Die Wechselwirkung setzt sich aus einem zentralen Term:

$$V_c = \sum_i V_i Y(\mu_i r_{12}),$$

einem Spin-Bahn Term:

$$V_{so} = \sum_i V_i Y(\mu_i r_{12}) \mathbf{L}\mathbf{S},$$

und einem Tensor Term zusammen:

$$V_t = \sum_i V_i Y(\mu_i r_{12}) r_{12}^2 \mathbf{S}_{12}$$

mit den Yukawa-Funktionen $Y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ und den Reichweiten $r_i = \frac{\hbar c}{m_i} = \frac{1}{\mu_i}$. dem Spin-Bahn Operator LS und dem tensor Operator S_{12} . Die Wechselwirkung wird somit durch die Überlagerung von drei Yukawa-Funktionen dargestellt. Den langreichweitigen (ca 1,41 fm) Teil beschreibt der π -Meson-Austausch, wohingegen der mittlere- und kurzreichweitige Anteil von 0,4 fm und 0,25 fm im isoskalaren Kanal durch den Austausch von ω - und σ -Mesonen realisiert wird und im Isovektor Kanal das ρ - und σ' -Meson, welches den spin-skalaren $2\text{-}\pi$ Austausch simuliert, verwendet wird.

Im Folgenden wird für Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung die von Frank Hofmann [35] erarbeitete und in [4] erweiterte Erweiterung der M3Y-Wechselwirkung als Grundlage genommen. Hierbei wurde die M3Y-Wechselwirkung durch Erweiterung der Nukleon-Meson-Kopplungskonstanten mit einer explizite Dichteabhängigkeit ergänzt. Ausgangspunkt hierbei ist die Dyson-Gleichung für den in-medium Propagator G_m^* eines Mesons mit der Masse m in Impulsraumdarstellung:

$$G_m^*(q, \rho) = G_m^0(q) + G_m^0(q) \Sigma_m(q, \rho) G_m^*(q, \rho).$$

Hierbei ist $G_m^0(p) = \frac{1}{m^2 + p^2}$ der freie Mesonen-Propagator mit dem Dreierimpuls p und Σ der Selbstenergi tensor. Der in-medium Propagator kann in einen freien und einen dichteabhängigen Anteil aufgespalten werden:

$$G_m^*(q, \rho) = G_m^0(q) + G_m^{(\rho)}(q).$$

In Leiternäherung ist die Zweikörperwechselwirkung welche vom Meson mit Masse m übertragen wird durch:

$$V_2(q, q') = \frac{g_{mNN}^2}{4\pi} G_m^0(p) F_m(p^2)$$

gegeben. Hierbei ist g_{mNN} der Meson-Nukleon-Vertex und $F_m(p^2)$ der Vertex-Formfaktor. Analog wird die Wechselwirkung für den dichteabhängigen Anteil definiert:

$$V_3(q, q') = \frac{g_{mNN}^2}{4\pi} G_m^{(\rho)}(p) F_m(p^2)$$

Betrachtet man die Bethe-Salpeter-Gleichung ohne die Mesonpolarizationselbstenergie:

$$\Gamma_2(q, q', k_F) = V_2(q, q') + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} V_2(q, k) G_{NN}(k, q_s) Q_F(k, q_s, k_F) \Gamma_2(k, q', k_F)$$

mit dem Nukleon-Nukleon-Propagator $G_{NN}(k, q_s)$ und dem Pauli-Projektor $Q_F(k, q_s, k_F)$, welche vom Impuls der Massenschale q_s abhängen. In kompakter Form kann die Bethe-Salpeter-Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$\Gamma_2 = V_2 + V_2 G_{NN} Q_F \Gamma_2.$$

Die formale Lösung dieser Gleichung ergibt:

$$\Gamma_2 = \chi_2(\rho) V_2$$

mit dem dichteabhängigen Suszeptibilität $\chi_2(\rho) = (1 - V_2 G_{NN} Q_F)^{-1}$. Der Hauptteil der Dichteabhängigkeit der Suszeptibilität χ_2 kommt durch den Pauli-Projektor zustande.

Eine analoge Betrachtung der Bethe-Salpeter-Gleichung für die gesamte Wechselwirkung $V(q, q', \rho) = V_2(q, q') + V_3(q, q', \rho)$ ergibt:

$$K = V_2 + V_3 + (V_2 + V_3) G_{NN} Q_F \Gamma,$$

welche durch Einführung der Bethe-Salpeter-Amplitude für die den dichteabhängigen Anteil:

$$\Gamma_3 = \frac{\Gamma_2(p) \Sigma_m(p, \rho) V_2(p)}{1 - G_m^0(p) \Sigma_m(p, \rho)}$$

durch

$$K = \chi_3(\rho) (\Gamma_2 + \Gamma_3)$$

gelöst werden kann. Die Suszeptibilität ist eine Funktion der Polarizationswechselwirkung Γ_3 , welche von der elementaren Zweikörper-Meson-Nukleon-Wechselwirkung abhängt. Das oben gezeigte Schema verdeutlicht das Zusammenspiel von Zwei- und Dreikörperkräften bei der Bestimmung einer dichteabhängigen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Betrachtet man eine Bruecknerartige Zweikörperwechselwirkungs G-Matrix Γ_2 so kann die Dreikörperrenormierung durch gegeben werden:

$$\begin{aligned} K(q, q', \rho) &= \chi_3(\rho) \Gamma_2(q, q', \rho) \\ &= \chi_3(\rho) \chi_2(\rho) V_2(q, q'). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung einer Parametrisierung der in-medium Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wird für die K-Matrix:

$$K_\alpha(q, q_s, k_F) = \sum_m z_m(k_F) \frac{4\pi g_{\alpha m}^2}{m^2 + p^2} F_m(p)$$

als Ansatz gewählt. Hierbei bezeichnet der Index α den skalaren, pseudoskalaren, vektoriellen, axialvektor Anteil. Motiviert durch Dirac-Brueckner Rechnungen [19],[34] wird $z_m(k_F)$ durch rationale Funktionen:

$$z_m(k_F) = \alpha_F(k_F) \frac{a_m^2}{(1 + b^2(\frac{k_F}{k_{F_0}})^{\frac{2}{3}})^2} + \frac{c_m^2(1 - \alpha_F(k_F))}{(1 + d^2(\frac{k_F}{k_{F_0}})^{\frac{2}{3}})^2}$$

angesetzt. Hierbei ist $\alpha_F(k_F)$ eine aus Fermi-Funktionen zusammengesetzte Funktion und k_{F_0} der Fermi-Impuls bei Sättigung.

Für eine solche Meson-Austausch-Wechselwirkung lautet das Dichtefunktional:

$$E = \sum_{1=p,n} T_q + \frac{1}{2} \sum_{q,q'=p,n} N_s N_{s'} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} n_q(k_1) \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} n_{q'}(k_2) V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \rho)$$

Die Besetzungszahlen $n_q(k)$ sind in der Quasiteilchennäherung für kalte Kernmaterie ($T \ll \epsilon_F$) als $n_q(k) = \Theta(k_{F_q} - k)$ gegeben, wobei k_{F_q} den Fermi-Impuls für Protonen bzw. Neutronen bezeichnet.

Im Unterschied zu anderen Ansätzen [40], bei denen die Dichteabhängigkeit durch Anpassung an Kerndaten bestimmt wurde, sind die Parameter a_m , b_m , c_m und d_m durch Anpassung rein theoretischen Ergebnissen für Zustandsgleichungen von unendlicher Kernmaterie der Urbana Gruppe [1] bestimmt worden (siehe Abbildung 4.1.2 und 4.1.2) .

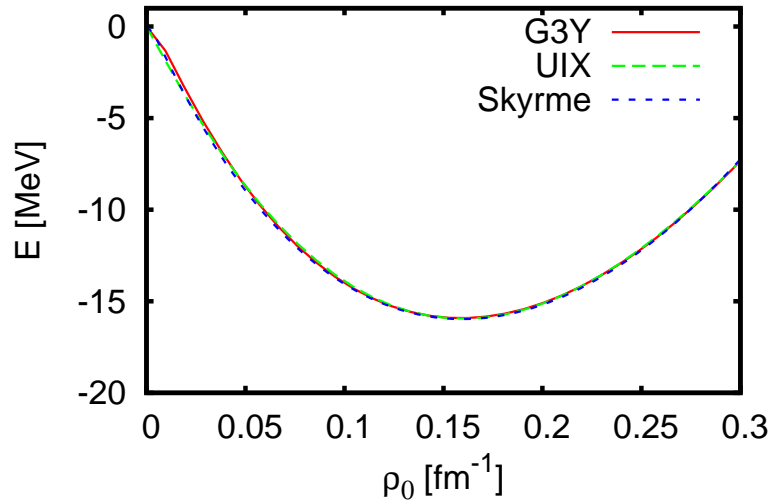


Abbildung 4.1: Fit der Zustandsgleichung an symmetrische Kernmaterie.

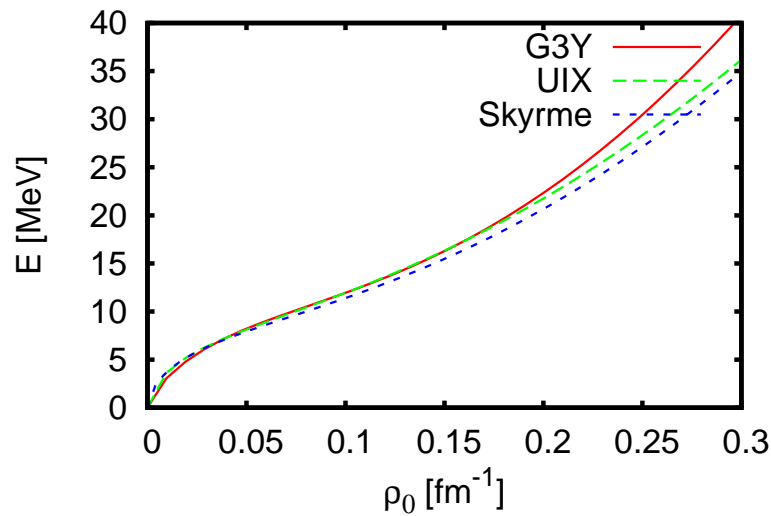


Abbildung 4.2: Fit der Zustandsgleichung an reine Neutronenm-Kernmaterie.

4.2 Quasiteilchenbild

Zur Untersuchung der Paarwechselwirkung betrachtet man sogenannte gerade-gerade-Kerne (gg-Kerne) welche eine gerade Anzahl von Protonen sowie Neutronen besitzt. Dabei ist zu erkennen, dass für diese Kerne der Grundzustand immer den Gesamtdrehimpuls Null besitzt. Dies spricht für ein Absenken dieses Zustands im Vergleich zu anderen Drehimpulskombinationen. Betrachtet man die Bindungsenergie von gg-Kernen genauer, so lässt sich erkennen, dass diese stärker gebunden sind als Kerne mit ungerader Protonen- oder Neutronen-Anzahl. Ein Vergleich des Grundzustands und der niedrigsten Einteilchenanregungen zeigt, dass gg-Kernen eine Energielücke von 1 – 2MeV besitzen.

Ziel der weiteren Untersuchung ist es diese Transformation zu finden und V_p , dass sich als die Paarwechselwirkung ergibt, zu bestimmen.

4.2.1 Paarkraft

Die Paarkraft bietet einen einfachen Formalismus für eine Modellwechselwirkung, welche diese Restwechselwirkung beschreibt. Betrachtet man eine Nukleonenpaar in derselben j -Schale genauer, welche zum Gesamtdrehimpuls Null

koppelt, so ergibt sich für die Wellenfunktion im Einteilchenmodell:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{m_1, m_2} (jj0|m_1 m_2 0) \psi_{m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{m_2}(\mathbf{r}_2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \psi_m(\mathbf{r}_1) \psi_{-m}(\mathbf{r}_2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \sum_m (-1)^{j-m} Y_{jm}(\Omega_1) Y_{j-m}(\Omega_2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) P_j(\cos \theta_{12}).
 \end{aligned}$$

Hierbei ist zur Einfachheit der Spin vernachlässigt, da dieser für das Verständnis der Hauptargumente entbehrlich ist. θ_{12} bezeichnet den Winkel zwischen den Richtungen von Ω_1 und Ω_2 . Die Legendre-Polynome $P_j(\cos \theta_{12})$ besitzen ein Maximum nahe dem Argument eins, was die Zweiteilchen-Wahrscheinlichkeitsverteilung für zwei Nukleonen die nahe beieinander liegen begünstigt. Ansonsten ist eine Paarung von Einteilchenzuständen mit der Drehimpulsprojektion m und $-m$, die über Zeitumkehr auseinander hervorgehen und eine ähnliche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen zu erkennen. Dies unterstützt die Annahme einer geometrischen Korrelation. Als Ansatz für die Erzeugung eines Nukleonen-Paars in der j -Schale wird der Operator \hat{A}^\dagger mit:

$$\hat{A}_j^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{-m}^\dagger$$

eingeführt. Das Paarkraftpotential V_P kann somit als:

$$V_P = -G \hat{A}^\dagger \hat{A}$$

beschrieben werden. $G > 0$ ist hierbei die Stärke der Paarkraft. Die Definition des Paarkraftpotentials ist hierbei durch den Teilchenzahloperator inspiriert und soll eine Zählung aller Paare, die zum Drehimpuls Null koppeln, darstellen.

Eine Erweiterung der Betrachtung auf den Fall mit N Teilchen in einer j -Schale führt zum Senioritätsmodell und zum Quasispin-Modell (siehe [30]), welche die Wirkung der Paarkraft sehr gut wiedergeben, aber durch die Annahme einer teilweise gefüllten j -Schale beschränkt sind.

4.2.2 BCS-Modell

Betrachtet man deformierte Kerne, so kann man feststellen, dass es keine Entartung der unterschiedlichen Projektionen m innerhalb einer j -Schale mehr gibt. Kramers-Entartung (siehe [54]) sichert immer noch die Existenz von Paaren entarteter, einander zeitumkehrkonjugierter Zustände, die über eine kurzreichweitige Kraft stark koppeln.

Das BCS-Modell von Bardeen, Cooper und Schrieffer [6] ist ursprünglich zur Beschreibung der Theorie der Supraleitung in Festkörpern entwickelt worden. Es beschreibt diesen Effekt mit Hilfe stark gekoppelter Impulszustände, sogenannten Cooper-Paaren. Belyaev [7] wandte dieses Modell erstmals auf Kerne an.

Der Ausgangspunkt der Untersuchung ist, dass sich der Hamiltonoperator des Systems als in einen Einteilchenanteil \hat{H}_0 und eine der Paarkraft ähnliche Restwechselwirkung \hat{H}_P aufteilen lässt:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_P \\ &= \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{kk' > 0} \langle k, -k | v | k', -k' \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'}.\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt k alle Quantenzahlen der Einteilchenzustände. Im einfachsten Fall kann das Matrixelement der Restwechselwirkung durch die Kontaktwechselwirkung $-G$ ersetzt werden:

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - G \sum_{kk' > 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'}.\quad (4.1)$$

Der BCS-Zustand, definiert durch:

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0}^{\infty} \left(u_k + v_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \right) |0\rangle,\quad (4.2)$$

gibt eine Näherungslösung für diesen einfachsten Fall des Hamiltonoperators. Hierbei geben die Betragsquadrate der Amplituden $|v_k|^2$ und $|u_k|^2$ die Wahrscheinlichkeiten an, ob ein Paar von Einteilchenzuständen $(k, -k)$ besetzt oder leer ist. Die Amplituden v_k und u_k werden mit Hilfe des Variationsprinzips berechnet und können als reelle Zahlen angenommen werden. Mit Hilfe der Normierungsbedingung für die BCS-Zustände $|BCS\rangle$ kann ein Zusammenhang zwischen den beiden Amplituden gefunden werden:

$$\begin{aligned}\langle BCS | BCS \rangle &= \prod_{k>0}^{\infty} (u_k + v_k \hat{a}_{-k} \hat{a}_k) |0\rangle \prod_{k'>0}^{\infty} (u_{k'} + v_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{-k'}^\dagger) |0\rangle \\ &= \prod_{k>0}^{\infty} (u_k^2 + v_k^2) = 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (4.3)$$

Es zeigt sich, dass die Teilchenzahl N in der BCS-Zustandsbeschreibung keine gute Quantenzahl mehr darstellt. Betrachtet man die Teilchenzahl N und ihre quadratische Schwankung ΔN^2 genauer so ergibt sich:

$$N = \sum_{k>0} 2v_k^2$$

und

$$\begin{aligned} \Delta N &= \langle BCS | \hat{N}^2 | BCS \rangle - \langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle^2 \\ &= 4 \sum_{k>0} u_k^2 v_k^2. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Einteilchenzustände mit gebrochenzahligen Besetzungswahrscheinlichkeiten (weder $u_k^2 = 1$ noch $v_k^2 = 1$) für die quadratische Schwankung verantwortlich sind. Die Unbestimmtheit der Teilchenzahl kann jedoch für große Teilchenzahlen ($\Delta N \ll N$) vernachlässigt werden.

Zur Bestimmung von u_k und v_k betrachtet man den Variationsansatz:

$$\delta \langle BCS | \hat{H} - \lambda \hat{N} | BCS \rangle = 0.$$

Der Lagrange-Multiplikator λ wurde eingeführt um die Zwangsbedingung der Teilchenzahlerhaltung zu erfüllen. Dies führt zu Beziehung:

$$4 \left(\epsilon_k^0 - \lambda \right) v_k - 2G \left(\sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \right) u_k - 4Gv_k^3 - \frac{v_k}{u_k} \left[-2G \left(\sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \right) \right] = 0.$$

Es ist zu erkennen, dass die Gleichungen für verschiedene Werte von k durch:

$$\Delta_k = G \left(\sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \right) \quad (4.4)$$

miteinander gekoppelt sind.

Zur Bestimmung von v_k und u_k setzt man eine konstante Kopplung $\Delta_k = \Delta$ als bekannt voraus und führt die Einteilchenenergie $\epsilon_k = \epsilon_k^0 - \lambda - Gv_k^2$ ein. Dies führt zu der vereinfachten Gleichung:

$$2\epsilon_k v_k u_k + \Delta \left(v_k^2 - u_k^2 \right) = 0,$$

welche sich nach v_k^2 auflösen lässt:

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right).$$

Aus der Bedingung, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit für große Einteilchenenergien $\epsilon \rightarrow \infty$ gegen Null gehen muss, folgt das negative Vorzeichen und man erhält als Ergebnis:

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right).$$

Abbildung (4.2.2) zeigt den Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Einteilchenenergie ϵ_k . Es ist zu sehen, dass für $\epsilon_k = 0$ die Besetzungswahrscheinlichkeiten u_k^2 und v_k^2 gleich $\frac{1}{2}$ sind. Für negative Wert von ϵ_k geht u_k^2 gegen Null und v_k^2 gegen eins. Für positive Werte gilt das Gegenteil: v_k^2 geht gegen Null und u_k^2 gegen Eins. λ kann als verallgemeinerte Fermi-Energie interpretiert werden.

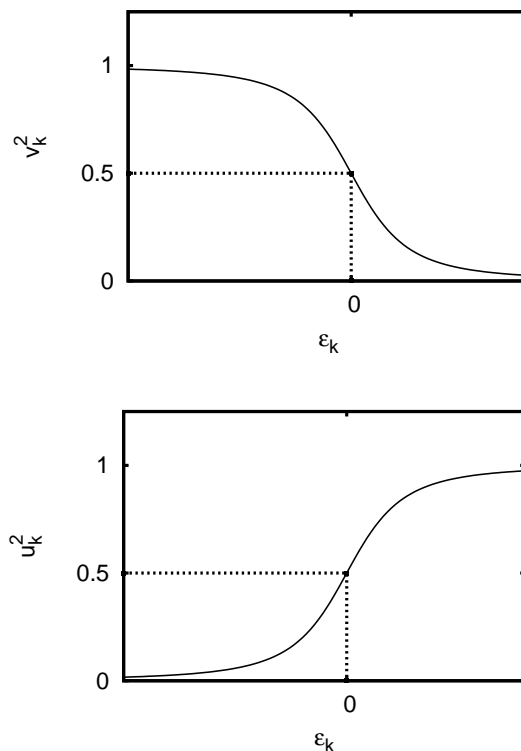


Abbildung 4.3: Abhängigkeit der Besetzungswahrscheinlichkeit von der Einteilchenenergie ϵ_k .

Der unbekannte Parameter Δ kann nun durch explizites Einsetzen der Ergebnisse für u_k und v_k in die Definition (4.4) bestimmt werden. Man erhält die sogenannte Gap-Gleichung (gap, engl. Lücke):

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta}{\epsilon_k^2 + \Delta^2},$$

welche iterativ durch Verwendung der bekannten Wert von G und ϵ_k^0 gelöst werden und mit der Paardichte:

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_j u_j v_j (2j + 1) \varphi_j(r) \varphi_j^*(r)$$

verbunden ist. Abbildung 4.2.2 zeigt die Amplituden der Paardichte in Abhängigkeit von der Einteilchenenergien ϵ_k . Das chemische Potential λ kann aus der Bedingung für die Gesamtteilchenzahl:

$$N = \sum_{k>0} 2v_k^2$$

bestimmt werden.

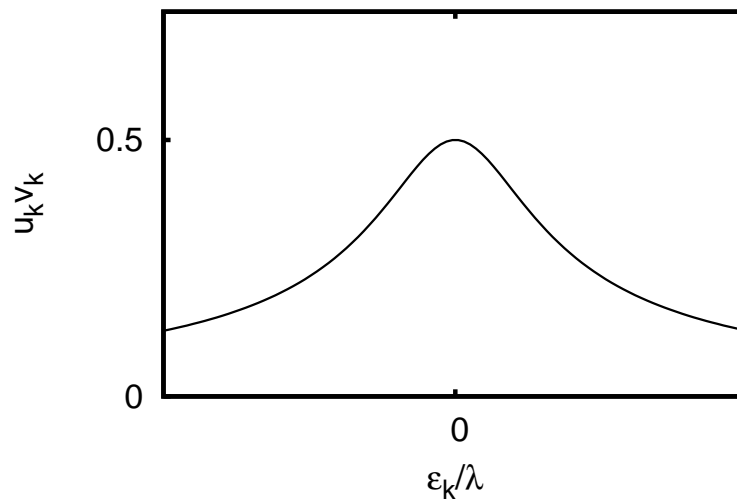


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung des Produkts der Besetzungswahrscheinlichkeit u_k und v_k in Abhängigkeit von der Einteilchenenergie ϵ_k .

4.2.3 Bogolyubov-Transformation

Eine elegante Weise das BCS-Modell zu formulieren haben Bogolyubov und Valatin ([10], [11],[57]) durch Einführung von Quasiteilchen vorgestellt. In ihrer Formulierung werden mit Hilfe der sogenannte Bogolyubov-Transformation die Operatoren aus dem bekannten Teilchen- und Lochbild in Quasiteilchen-Operatoren transformiert und die angeregten Zustände des Kerns können als Quasiteilchenanregungen konstruiert werden.

Ausgangspunkt der Beschreibung ist die Einführung des Operators \hat{a}_k im Quasiteilchenbild, der den BCS-Grundzustand $|BCS\rangle$ als Vakuum darstellt:

$$\hat{a}_k|BCS\rangle = 0. \quad (4.5)$$

Der Quasiteilchenoperator \hat{a}_k soll durch Transformation aus den bekannten Operatoren im Teilchenbild hervorgehen. Als Ansatz bietet sich:

$$\hat{a}_k = p\hat{a}_k + q\hat{a}_k^\dagger$$

mit den Transformationskoeffizienten p und q an. Mit Hilfe der Definition des BCS-Zustands (4.2) und der Bedingung (4.5) folgt somit:

$$\begin{aligned} \hat{a}|BCS\rangle &= (p\hat{a}_k + q\hat{a}_k^\dagger) (u_k + v_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{-k}^\dagger) |0\rangle \\ &= (qu_k + pv_k)\hat{a}_{-k}^\dagger |0\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit folgt für die Entwicklungskoeffizienten:

$$qu_k + pv_k = 0.$$

Als Lösungsansatz wird $p = su_k$ und $q = -sv_k$ mit reellem Faktor s angesetzt. Dies führt mit einer analogen Betrachtung für \hat{a}_{-k} zu den Definitionen der Vernichtungsoperatoren im Quasiteilchenbild:

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= su_k\hat{a}_k - sv_k\hat{a}_{-k}^\dagger \\ \hat{a}_{-k} &= tu_k\hat{a}_{-k} + tv_k\hat{a}_k^\dagger, \end{aligned}$$

sowie der dazugehörigen Erzeugeroperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^\dagger &= su_k\hat{a}_k^\dagger - sv_k\hat{a}_{-k} \\ \hat{a}_{-k}^\dagger &= tu_k\hat{a}_{-k}^\dagger + tv_k\hat{a}_k. \end{aligned}$$

Die neuen Quasiteilchenoperatoren sollen im Folgenden der üblichen Kommutatorrelation für Fermionen genügen:

$$\begin{aligned}\delta_{kk'} &= \{\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger\} \\ &= \delta_{kk'} s^2 (u_k^2 + v_k^2).\end{aligned}$$

Mit der bekannten Bedingung $u_k^2 + v_k^2 = 1$ und dem Setzen von $s = t = 1$ kann diese Bedingung erfüllt werden. Somit folgt für die Bogolyubov-Transformation:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_k &= u_k \hat{a}_k - v_k \hat{a}_{-k}^\dagger & \hat{a}_{-k} &= u_k \hat{a}_{-k} + v_k \hat{a}_k^\dagger \\ \hat{\alpha}_k^\dagger &= u_k \hat{a}_k^\dagger - v_k \hat{a}_{-k} & \hat{a}_{-k}^\dagger &= u_k \hat{a}_{-k}^\dagger + v_k \hat{a}_k.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von u_k und v_k betrachtet man den Hamiltonoperator des Systems genauer. Im Teilchenbild ist dieser durch:

$$\hat{H} = \sum_{k_1 k_2} t_{k_1 k_2} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} + \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}$$

gegeben. Hierbei ist $t_{k_1 k_2}$ die kinetische Energie und $\bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = v_{k_1 k_2 k_3 k_4} - v_{k_1 k_2 k_4 k_3}$ das antisymmetrisierte Matrixelement der Zweikörperwechselwirkung. Mit Hilfe der inversen Bogolyubov-Transformation und der Normalordnung der Operatoren kann der Hamiltonoperator ins Quasiteilchenbild gebracht werden. Mit der Subtraktion des Terms für die Zwangsbedingung der Teilchenzahl erhält man somit:

$$\hat{H} - \lambda \hat{N} = U + \hat{H}_{11} + \hat{H}_{20} + \hat{H}_{40} + \hat{H}_{31} + \hat{H}_{22}.$$

Die Indizes geben die Anzahl der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren an. Der Hamiltonoperator setzt sich aus der Energie des BCS-Grundzustands U und den Quasiteilchen-Quasiloeh-Anregungen zusammen. \hat{H}_{11} gibt die Quasiteilchen-Quasiloeh-Anregungen. Der Term \hat{H}_{20} verletzt die Quasiteilchenzahlerhaltung und man fordert $\hat{H}_{20} = 0$. Die weiteren Terme enthalten Kopplungen höherer Ordnung und werden vernachlässigt. Die Forderung des Verschwinden von \hat{H}_{20} führt auf die Beziehung:

$$\begin{aligned}0 &= \left\{ t_{kk'} + \lambda \delta_{kk'} + \sum_{k'' > 0} [\bar{v}_{k-k''k'-k''} + \bar{v}_{kk''k'k''}] v_{k''}^2 \right\} (u_k v_{k'} - u_{k'} v_k) \\ &\quad + \sum_{k'' > 0} \bar{v}_{k-k''k''-k''} u_{k''} v_{k''} (u_k u_{k'} + v_k v_{k'}),\end{aligned}$$

welche die Hartree-Fock-Bogolyubov-Gleichung (HFB-Gleichung) ergibt. Mit dieser Gleichung können u_k und v_k bestimmt werden. Durch Einführung des Hartree-

Fock-Bogolyubov-Potentials:

$$\begin{aligned}\Gamma_{kk'}^{HFB} &= \sum_{k''>0} (\bar{v}_{k-k''k'-k''} + \bar{v}_{kk''k'k''}) v_{k''}^2 \\ &= \sum_{k''} \bar{v}_{kk''k'k''} v_{k''}^2\end{aligned}$$

und dem Paarkraftpotential:

$$\Delta_{k-k'} = - \sum_{k''>0} \bar{v}_{k-k''k'-k''} u_{k''} v_{k''}$$

kann die HFB-Gleichung in kompakter Form dargestellt werden:

$$0 = \left(t_{kk'} + \lambda \delta_{kk'} + \Gamma_{kk'}^{HFB} \right) (u_k v_{k'} - u_{k'} v_k) - \Delta_{k-k'} (u_k u_{k'} + v_k v_{k'}).$$

Für den BCS-Grundzustand und den Hamiltonoperator der Quasiteilchen-Quasiloeh-Anregung gilt somit:

$$\begin{aligned}U &= \sum_{k>0} \left\{ [t_{kk} - \lambda + \frac{1}{2} \Gamma_{kk}^{HFB}] 2v_k^2 - \Delta_{k-k} u_k v_k \right\} \\ \hat{H}_{11} &= \sum_{kk'>0} \left\{ [t_{kk'} - \lambda \delta_{kk'} + \Gamma_{kk'}^{BCS}] (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{k-k'} (u_k v_{k'} - v_k u_{k'}) \right\} (\hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_{k'} + \hat{\alpha}_{-k'}^\dagger \hat{\alpha}_{-k}).\end{aligned}$$

Eine Anwendung findet der einfache Fall einer diagonalen Paarkraft:

$$\Delta_{k-k'} = \Delta_k \delta_{kk'}.$$

Die HFB-Gleichung kann durch eine geeignete Wahl der Einteilchenzustände vereinfacht werden. Wählt man die Einteilchenzustände als die Eigenzustände eines geeigneten Einteilchen-Hamiltonoperators \hat{h} :

$$h_{kk'} = t_{kk'} - \lambda \delta_{kk'} + \Gamma_{kk'}^{HFB} = \epsilon_k \delta_{kk'}$$

folgt für die HFB-Gleichung:

$$2\epsilon_k u_k v_k - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) = 0 \quad \forall k.$$

Mit diesem Ansatz findet man für u_k und v_k ähnliche Formeln wie in der BCS-Theorie:

$$\begin{aligned}u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right), \\ v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right).\end{aligned}$$

Die Gap-Gleichung für das diagonale Paarkraftpotential ergibt sich zu:

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'' > 0} \frac{\bar{v}_{k-kk''-k''}}{\sqrt{\epsilon_{k''}^2 + \Delta_{k''}^2}} \Delta_{k''}.$$

Die Grundzustandenergie vereinfacht sich zu:

$$U = \sum_{k > 0} \left\{ [t_{kk} - \lambda + \frac{1}{2} \Gamma_{kk}^{HFB}] 2v_k^2 - \Delta_k u_k v_k \right\}.$$

Der Quasiteilchen-Quasiloeh-Hamiltonoperator kann vereinfacht als:

$$\hat{H}_{11} = \sum_{k > 0} e_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k})$$

mit der Quasiteilchenenergie $e_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$ dargestellt werden.

Diese Darstellung entspricht dem Hamiltonoperator nichtwechselwirkender Quasiteilchen. Die Paarkraft-Korrelation können somit als Korrelation zwischen Nukleonen über gebrochene Besetzungszahlen beschrieben werden und die angeregten Zustände entsprechen nichtwechselwirkenden Quasiteilchen.

4.3 Rechnungen für Grundzustandseigenschaften von Kernen

In diesem Abschnitt werden Rechnungen für das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Hartree-Fock-Bogolyubov-Verfahren vorgestellt. Hierbei werden ausgewählte Kerne untersucht, welche in Kapitel 7 zur Untersuchungen für Ladungsaustauschanregungen näher betrachtet werden. Um einen Eindruck über die Grundzustände der Kerne zu erhalten, werden typische Größen wie ihre Energiespektrum, Proton- und Neutrondichten sowie Effektivwerte für die Radien bestimmt.

Abbildung (4.5) zeigt das Quasiteilchenenergiespektrum der Protonen und Neutronen für die Kerne ^{12}C und ^{24}Mg . Beide Kerne besitzen jeweils gleich Protonen und Neutronenzahl und weisen auch im Energiespektrum ähnliche Struktur für Protonen und Neutronen auf. Die verschobene Energieskala für Protonen resultiert aus der Coulombwechselwirkung. Im Vergleich dazu ist die Struktur des Spektrums von ^{56}Fe (Abbildung 4.6) für Protonen und Neutronen unterschiedlich aufgebaut.

4.3 Rechnungen für Grundzustandseigenschaften von Kernen

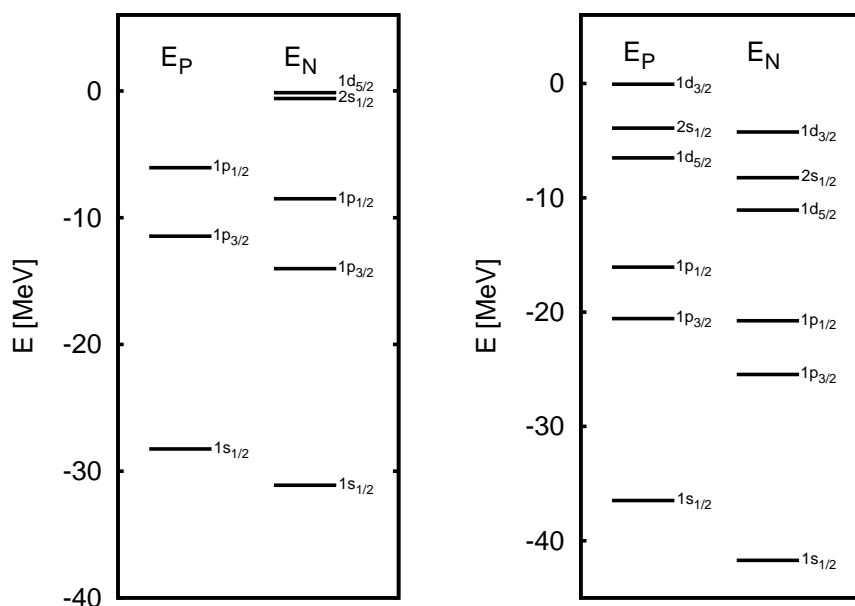


Abbildung 4.5: Berechnetes Einteilchenspektrum für ^{12}C (links) und ^{24}Mg (rechts) im Grundzustand.

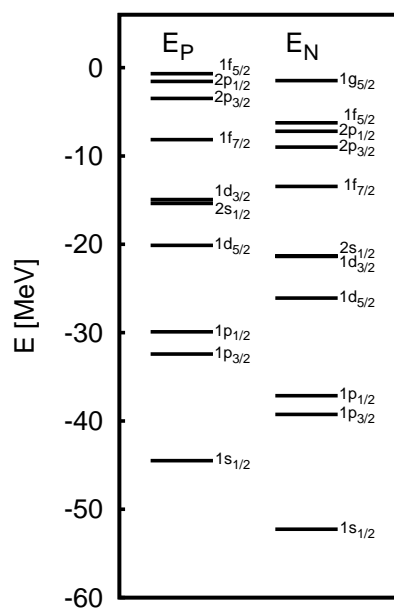


Abbildung 4.6: Berechnetes Einteilchenspektrum für ^{56}Fe im Grundzustand.

Abbildung 4.7 zeigt die Bindungsenergie für die Isotopenkette von Kohlenstoff, hierbei sind als Orientierungshilfe die experimentellen Daten durch eine geglättete Kurve abgebildet. Wie zu erkennen ist bildet der Verlauf eine Minimum um $A = 12$, was dazu führt, dass die Isotope ^{12}C und ^{13}C die beiden stabilen Isotope der Kette bilden.

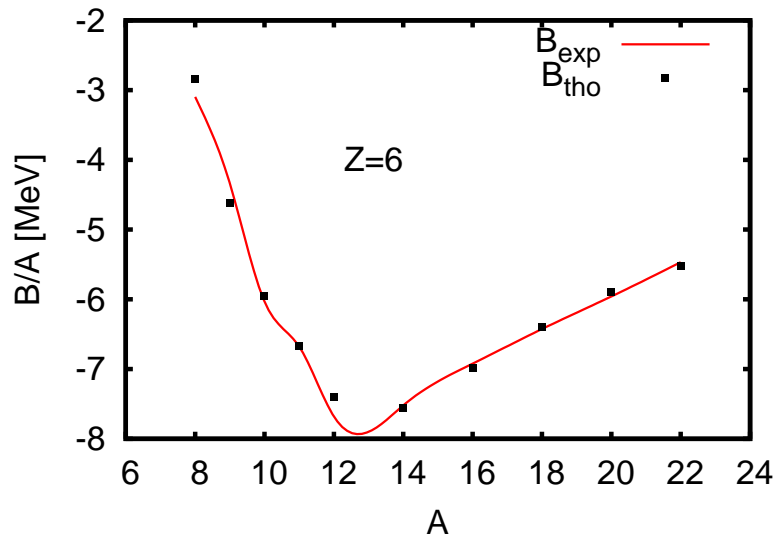


Abbildung 4.7: Berechnete Bindungsenergien pro Teilchen für Kohlenstoff im Vergleich mit experimentellen Daten aus [5]. Als Orientierungshilfe sind die experimentellen Daten durch eine geglättete Kurve abgebildet.

Protonen- und Neutronenzustandsdichten geben einen Eindruck auf die Struktur eines Kerns, so besitzt ein kugelsymmetrischer Kern eine Dichteverteilung die einer Fermiverteilung (Abbildung 4.8) entsprechen. Abbildung 4.10 zeigt die Protonen- und Neutronenzustandsdichte für verschiedene Kerne. Sie zeigen wie stark diese Idealform von Kern zu Kern variiert. Wie eine solche Entwicklung bei festgehaltener Protonenzahl aussieht kann in Abbildung 4.11 am Beispiel der Nickel-Isotopenkette erkannt werden. Ausgehend von ^{48}Ni mit 28 Protonen und 20 Neutronen zeigt sich wie mit wachsender Neutronenzahl eine Neutronenhaut zu ^{78}Ni bildet. Die Protonendichteverteilung bleibt hierbei nahezu konstant. Die Entstehung von Proton- und Neutronenhäuten ist eine wichtige Frage der Kernstrukturphysik. Es wird angenommen, dass leicht Kerne an ihrer Oberfläche ähnliche Protonendichten und Neutronendichten aufweisen, wohingegen schwere neutronenreiche Isotope eine neutronenreichere Haut besitzen. Eine modellunabhängige Größe zur Untersuchung dieses Phänomens ist der mittlere quadratische Radius (Engl. Root Mean Square). Abbildung 4.9 zeigt die

mittleren quadratischen Radien der Massen und den vom elektrischen Formfaktor abhängigen gemittelten Ladungsradius der Nickelisotopenkette. Es ist zu erkennen, wie sich für dieses Beispiel, mit wachsender Neutronenzahl der Massenradius für Neutronen anwächst und die Annahme einer Neutronenhaut bekräftigt. Der Ladungsradius hingegen bleibt für alle Isotope nahezu konstant. Dies deutet darauf hin, dass sich die gesamte Ladung, getragen von den Protonen, im Inneren befindet, während die Schicht aus Neutronen mit wachsender Nukleonenzahl A in der Isotopenkette deutlich zunimmt.

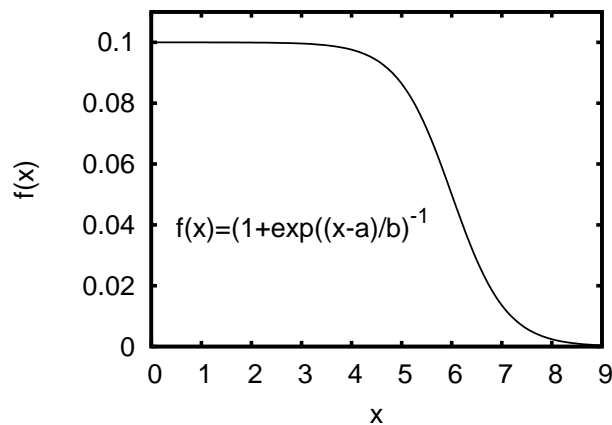


Abbildung 4.8: Verlauf einer Fermiverteilung.

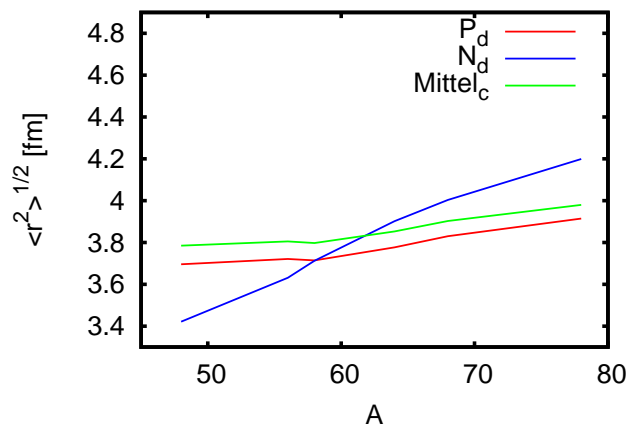


Abbildung 4.9: Berechneter Effektivwert (Engl. Root Mean Square) der Radien für Materiedichten von Proton P_d und Neutron N_d sowie die gemittelte Ladungsdicht $Mittel_c$ für die Nickel Isotopenkette.

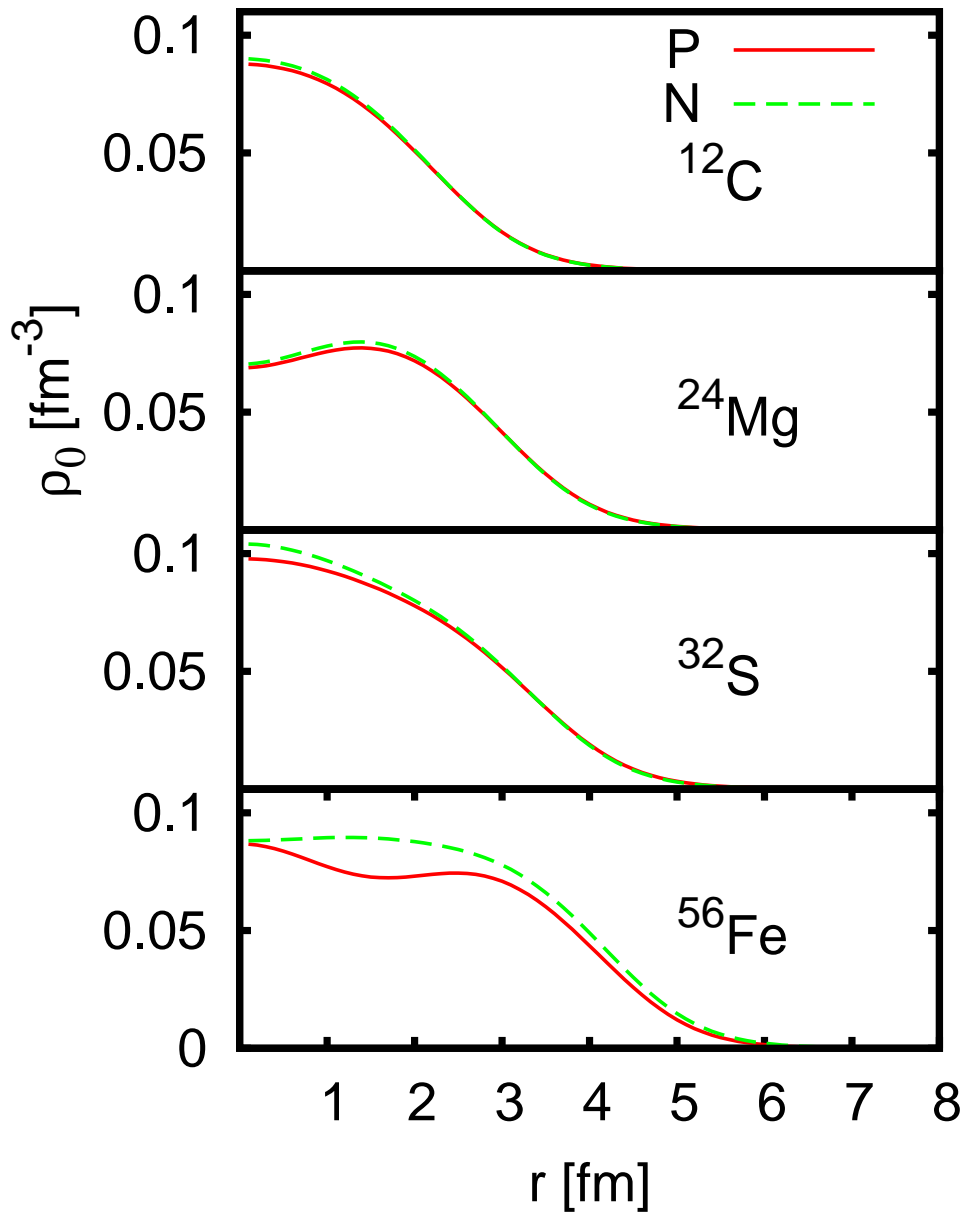


Abbildung 4.10: Berechnete Proton- und Neutrongrundzustandsdichten für ausgewählte Kerne.

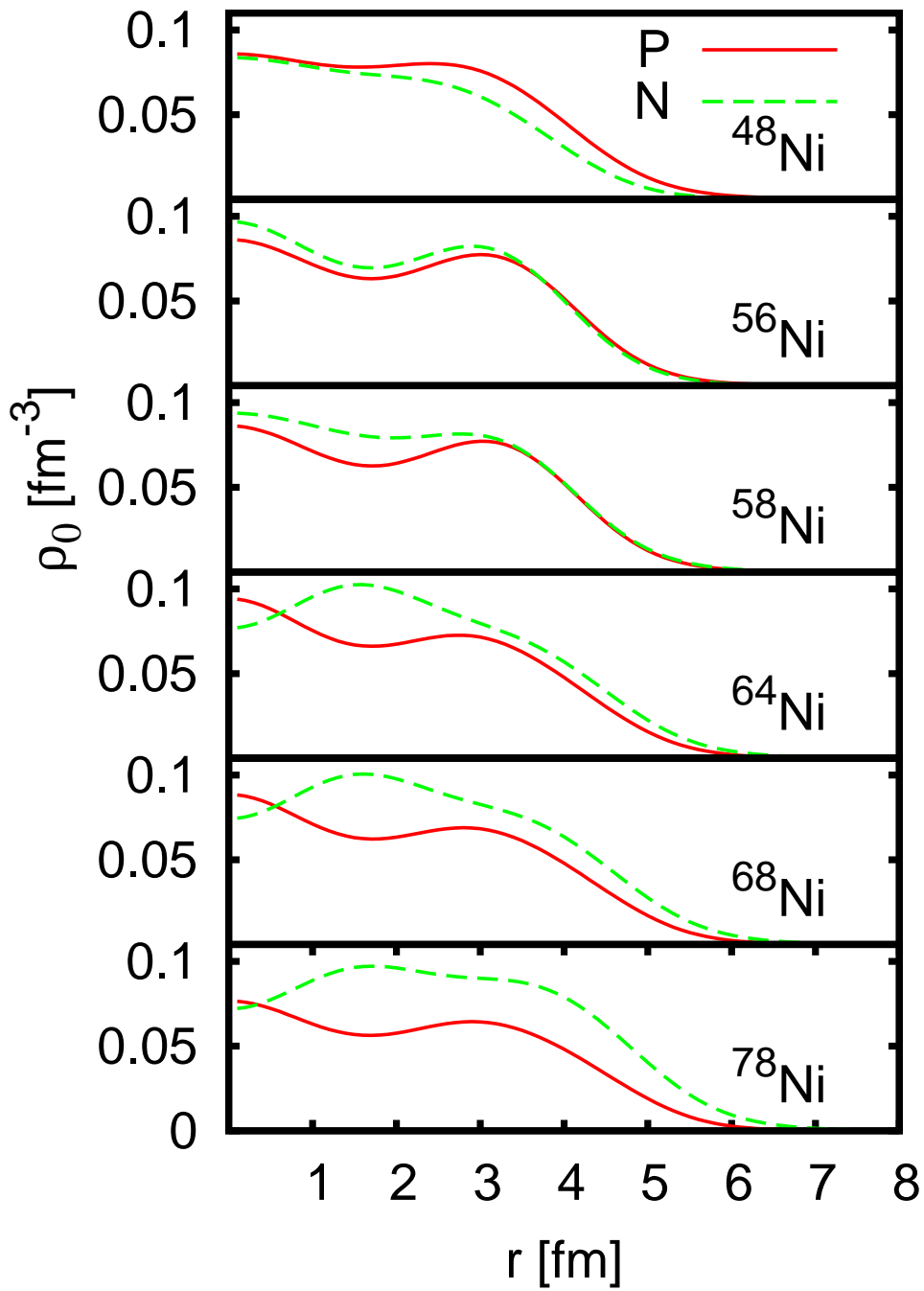


Abbildung 4.11: Berechnete Proton- und Neutrongrundzustandsdichten für die Nickelisotopenkette.

5

Quasiteilchen Random Phase Approximation

In den vorhergegangenen Kapiteln wurden allgemeine Methoden zur Untersuchung von Vielteilchensystemen vorgestellt, welche ihre Anwendung in zahlreichen Gebieten der Physik finden. Im Folgenden wird das allgemeine Feld, welches von der Festkörperphysik über die Atomphysik bis hin zur Elementarteilchenphysik reicht auf die Behandlung von Problemen der Kernphysik eingeschränkt. Es werden Methoden vorgestellt die im Rahmen dieser Arbeit erarbeitet wurden und es ermöglichen endliche Kerne und ihre Anregungsspektren zu untersuchen.

5.1 Diskretisierung des Quasiteilchenkontinuums

Untersuchungen von Kernspektren zeigen, dass der Kern als System aus Protonen und Neutronen zum einen ein diskretes Kernspektrum besitzt, aber auf der anderen Seite auch Anregungszustände im Kontinuum aufweist. Diese Kontinuumszustände sind rechentechnisch schwer zu behandeln und führen dazu, dass die Untersuchung von endlichen Kernen erschwert wird. Im Folgenden wird mit Hilfe geeigneten physikalischen Randbedingungen eine Diskretisierung des Quasiteilchenkontinuums vorgestellt, welche die weitere Untersuchung endlicher Kerne rechentechnisch erleichtert.

Als Ausgangspunkt für unsere Untersuchung des Kontinuums betrachten wir die Energien im Quasiteilchenbild. Für die Quasi-Einteilchenenergien ε_p und für die Quasi-Einlochenergien ε_h erhalten wir relativ zum chemischen Potential μ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \mu + E_p \\ \varepsilon_h &= \mu - E_p.\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt die Quasiteilchenenergie E_p den Zusatzbeitrag jedes angeregten Quasiteilchens. Dieser Beitrag kann mit Hilfe der Hartree-Fock-Energien ε_0 und der Paarungsenergie Δ_p aus:

$$E_p^2 = (\varepsilon_0 - \mu)^2 + \Delta_p^2$$

bestimmt werden.

Mit Hilfe der Gorkov-Gleichung kann eine gekoppelte Differentialgleichung zur Bestimmung der Quasiteilchenwellenfunktionen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}(h_p - \varepsilon_p)\phi_p &= +\Delta\phi_h \\ (h_h - \varepsilon_h)\phi_h &= -\Delta\phi_p.\end{aligned}$$

Unsere Betrachtung bezieht sich speziell auf Teilchen im Kontinuum, d.h. für $E_p > |\mu|$. Für $|\mu| \gg \Delta$ führt dies zu einer Entkopplung der Differentialgleichung

und somit zu ungepaarten Zuständen φ :

$$\begin{aligned}(h_p - \varepsilon_p)\varphi_p &= 0 \\ (h_p - \varepsilon_h)\varphi_h &= 0.\end{aligned}$$

Zur Diskretisierung der Kontinuumszustände wird eine unendlich hohe Barriere für große Abstände $R_\infty \gg l$ angesetzt. Dies entspricht der Randbedingung:

$$\varphi_p(R_\infty) = 0. \quad (5.1)$$

Als Ansatz für die ungepaarte Wellenfunktionen φ_p bietet sich eine stehende Wellen mit der Streuphase δ_l an:

$$\varphi(k, r) = \cos(\delta_l)F_l(k, r) + \sin(\delta_l)G_l(k, r).$$

Hierbei bezeichnen die Funktionen F_l und G_l :

$$\begin{aligned}F_l(k, r) &= j_l(kr)kr \\ G_l(k, r) &= n_l(kr)kr.\end{aligned}$$

j_l und n_l sind die Bessel- bzw. Neumann-Funktionen (siehe [45]). Für geladene Teilchen d.h. Protonen sind F_l und G_l durch die entsprechenden Coulombfunktionen (siehe [45]) gegeben.

Wir betrachten explizit zunächst Neutronen. Dann ergibt sich ist Untersuchung des Kontinuums eine Betrachtung für große Abstände vom Kernmittelpunkt (d.h. $kr \ll \sqrt{l(l+1)} \sim l$) von Nöten, welche durch die Verwendung der asymptotischen Form der Bessel- und Neumann-Funktionen ermöglicht ist und zum Ansatz:

$$\begin{aligned}\varphi(k, r) &= \cos(\delta_l) \sin(kr - \frac{\pi}{2}l) + \sin(\delta_l) \cos(kr - \frac{\pi}{2}l) \\ &= \sin(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l)\end{aligned} \quad (5.2)$$

führt.

Die Randbedingung (5.1) führt für große Abstände zu:

$$\begin{aligned}\sin(kR_\infty - l\frac{\pi}{2} + \delta) &= 0 \\ kR_\infty - l\frac{\pi}{2} + \delta &= n\pi\end{aligned}$$

und bewirkt eine Diskretisierung der Wellenzahlen des Kontinuums:

$$k_n = k_0 \left((2n + l) - \frac{2}{\pi} \delta \right)$$

mit $k_0 = \frac{\pi}{2R_\infty}$ und den dazugehörenden Energien:

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \frac{\hbar^2 k_n^2}{2\mu} \\ &= \epsilon_0 \left((2n+1) - \frac{2}{\pi} \delta \right)^2.\end{aligned}$$

mit $\epsilon_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2\mu}$ Die dazugehörige Zustandsdichte $N(k)$ wird durch die Niveauabstände Δk :

$$N(k) = \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{d\epsilon}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned}\Delta k &= k_n - k_{n-1} \\ &= k_0 - \Delta k \frac{k_0}{\pi} \frac{\delta_n - \delta_{n-1}}{\Delta k}\end{aligned}$$

$$\Delta k = \frac{k_0}{\left(1 + \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta}{\partial k}\right)}. \quad (5.3)$$

Man sieht, dass $\Delta k \sim \frac{1}{R_\infty}$, also $\Delta k \rightarrow 0$ für $R_\infty \rightarrow \infty$. Für ein endliches aber großes R_∞ ergibt sich ein "Quasi-Kontinuum".

Für Protonen schließt die Diskretisierungsbedingung Beiträge aus der Coulomb-Streuung ein:

$$k_n = \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{\pi}(\delta - \sigma_l - \eta \ln(k_n R)) \right).$$

5.2 Bestimmung der Kontinuumswellenfunktion

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie mit Hilfe einer unendlichen hohen Barriere (5.1) im Unendlichen das Quasiteilchenkontinuumspektrum diskretisiert werden kann. Zur Untersuchung von endlichen Kernen mit Hilfe der Greenfunktionsmethode sind neben dem Energiespektrum zusätzlich die Wellenfunktionen von Nöten. Im Folgenden werden die Kontinuumswellenfunktionen χ für das diskretisierte Quasiteilchenspektrum bestimmt.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient ein Partialwellenansatz für die Kontinuumswellenfunktion χ , welcher in einen Orts- und Impulsanteil zerlegt wird:

$$\chi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{kr} \sum_{lmj} i^l Y_{lm}^*(\hat{k}) \psi_{(l\frac{1}{2})jm_j}(k, \mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} \psi_{(l\frac{1}{2})jm_j}(k, \mathbf{r}) &= \underbrace{A_{lj}(k) \varphi_{lj}(k, r)}_{\equiv F_{lj}(k, r)} \mathcal{Y}_{(l\frac{1}{2})jm_j}(\hat{r}) \\ &= F_{lj}(k, r) \mathcal{Y}_{(l\frac{1}{2})jm_j}(\hat{r}). \end{aligned}$$

k und r bezeichnen hierbei den Radialanteil des Impuls- und Ortsvektors wohingegen \hat{k} und \hat{r} den Winkelanteil darstellen. Die Spin-Kugelfunktion \mathcal{Y}_{ljm} koppelt die Kugelfunktion Y_{lm_l} und die Pauli-Spinoren $\xi_{\pm\frac{1}{2}}$ zu gutem Drehimpuls:

$$\mathcal{Y}_{(l\frac{1}{2})jm_j}(\hat{r}) = \sum_{m_l m_s} (lm_l \frac{1}{2} m_s | jm_j) Y_{lm_l}(\hat{r}) \xi_{m_s}.$$

Durch Ausnutzung von Symmetriebedingungen reduziert sich die Bestimmung der Kontinuumswellenfunktion χ auf den Radialteil F_{lj} welcher als Produkt einer stehenden Welle φ_{lj} und der Amplituden A_{lj} zusammengesetzt ist. Zur Bestimmung der Amplitude A_{lj} betrachten wir die Normierung der Gesamtkontinuumswellenfunktion im Impulsraum:

$$\int d\hat{k} \bar{\chi}^{(+)\dagger}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \chi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}'). \quad (5.4)$$

Durch Ausnutzen der Eigenschaften für die Kugelflächenfunktionen reduziert sich dieses Integral auf:

$$\left(\frac{4\pi}{kr}\right)^2 \sum_{lj} \bar{\psi}_{(l\frac{1}{2})jm_j}^+(k, \mathbf{r}) \psi_{(l\frac{1}{2})jm_j}(k, \mathbf{r}'). \quad (5.5)$$

Dies erlaubt eine Einschränkung der Betrachtung auf den radialen Anteil der Wellenfunktion F_{lj} . Die Schrödinger-Gleichung zweier Wellenzahlen k und \bar{k} für F_{lj} ist durch:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V_{lj}(r)\right) F_{lj}(k, r) = 0 \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \bar{k}^2 - V_{lj}(r) \right) \bar{F}_{lj}(\bar{k}, r) = 0 \quad (5.7)$$

mit $V_{lj} = V_{lj}^\dagger$ gegeben durch:

$$V_{lj} = -\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + \langle \mathbf{l} \mathbf{s} \rangle V_{SO}) + \frac{l(l+s)}{r^2}.$$

Die Differenz aus dem Produkt von \bar{F}^\dagger mit (5.6) und F^\dagger mit (5.6) führt zur Beziehung:

$$\bar{F}_{lj}^\dagger \frac{d^2}{dr^2} F_{lj} - F_{lj} \frac{d^2}{dr^2} \bar{F}_{lj}^\dagger + (k^2 - \bar{k}^2) F_{lj} \bar{F}_{lj}^\dagger = 0.$$

Ist das Potential $V(r) = V(r, E)$ energieabhängig, so ergibt sich ein Zusatzterm der zu einer spektroskopischen Amplitude $|z_l|^2 \sim \langle \frac{dV}{dE} \rangle < 1$ führt. Eine Integration über den Ortsraum verdeutlicht den Zusammenhang der Projektion $\langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle$ des Zustands F_{lj} auf den Zustand \bar{F}_{lj} mit der Wronskideterminante W der beiden Zustände:

$$\int_0^{R_\infty} dr \frac{d}{dr} \underbrace{\left(\bar{F}_{lj}^\dagger \frac{d}{dr} F_{lj} - F_{lj} \frac{d}{dr} \bar{F}_{lj}^\dagger \right)}_{W(\bar{F}_{lj}^\dagger, F_{lj})} + (k^2 - \bar{k}^2) \underbrace{\int_0^{R_\infty} dr F_{lj} \bar{F}_{lj}^\dagger}_{\langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle} = 0$$

$$\Rightarrow \langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle = \frac{1}{\bar{k}^2 - k^2} W(\bar{F}_{lj}^\dagger, F_{lj})|_{R_\infty}.$$

Zur Bestimmung der Amplitude A_{lj} wird im folgenden stufenweise der Grenzwert $k \rightarrow \bar{k}$ genommen. Die Berechnung der Wronskideterminante mit Hilfe der asymptotischen Form der ebenen Welle (5.2) führt zu der Beziehung:

$$\langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle = \frac{1}{2k} A^2(k) \frac{k \sin \bar{z} \cos z - \bar{k} \cos \bar{z} \sin z}{\bar{k} - k}$$

wobei z hierbei für $z = kR_\infty - \frac{\pi}{2}l + \delta_l$ steht.

Mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\sin \bar{z} \cos z = \frac{1}{2} (\sin(\bar{z} + z) + \sin(\bar{z} - z))$$

$$\cos \bar{z} \sin z = \frac{1}{2} (\sin(\bar{z} + z) - \sin(\bar{z} - z))$$

kann dieser Ausdruck in eine günstige Form gebracht werden:

$$\langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle = A^2(k) \frac{1}{4k} \left\{ -\sin(\bar{z} + z) + 2k \frac{\sin(\bar{z} - z)}{\bar{k} - k} \right\},$$

wobei $k - \bar{k} \sim 2k$ benutzt wurde. Für den Grenzwert $\bar{k} \rightarrow k = k_n$ ist zu erkennen, dass der zweite Summand:

$$\sin(\bar{z} - z) \rightarrow 0$$

verschwindet, was in dem Ausdruck:

$$\langle \bar{F}_{lj} | F_{lj} \rangle = \frac{1}{2} A^2(k) \left[R_\infty \cos(\bar{\delta}_l - \delta_l) + \cos(\bar{k} R_\infty - k R_\infty) \frac{\sin(\bar{\delta}_l - \delta_l)}{\bar{k} - k} \right]$$

resultiert.

Durch die Bildung des Grenzwerts $k \rightarrow \bar{k}$ wird die Phasendifferenz $\Delta\delta = \bar{\delta}_l - \delta_l$ der beiden stehenden Wellen sehr klein. Mit Hilfe der Reihenentwicklung von $\sin(x)$ für $x \rightarrow 0$ folgt für das Diagonalmatrixelement $\langle F_{lj} | F_{lj} \rangle$:

$$\langle F_{lj} | F_{lj} \rangle = \frac{R_\infty}{2} A^2(k) \left[1 + k_0 \frac{1}{\pi} \frac{\partial \delta}{\partial k} \right].$$

Mit der Annahme einer im Ortsraum normierten Kontinuumswellenfunktion:

$$\langle F_{lj} | F_{lj} \rangle \stackrel{!}{=} 1$$

führt dies auf den Ausdruck:

$$\Rightarrow \frac{1}{A^2(k)} = \frac{\pi}{2k_0} \left[1 + \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta_l}{\partial k} \right]$$

für A^2 . Für die Amplitudenfunktion A_l der Kontinuumswellenfunktion χ folgt somit:

$$A_{lj}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} B_{lj}(k)$$

$$B_{lj}^2(k) = \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta_l}{\partial k}} \quad [B_{lj}] = fm^{-\frac{1}{2}}.$$

Zur Bestimmung der Normierung (5.4) für die Gesamtkontinuumswellenfunktion χ wird der Impulsanteil der Wellenfunktion ψ_l im Impulsraum auf $\frac{\pi}{2} \delta(\bar{k} - k)$ normiert, was der Annahme von $R_\infty \rightarrow \infty$ und $A_{lj} \rightarrow A_{lj}^\infty = 1$ entspricht:

$$\langle \psi_{lj} | \psi_{lj} \rangle = \frac{\pi}{2} \delta(\bar{k} - k).$$

Für die Gesamtkontinuumswellenfunktion χ folgt somit:

$$\begin{aligned}\langle \bar{\chi} | \chi \rangle &= \frac{(4\pi)^2}{k^2} \sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\bar{k}}) Y_{lm}^\dagger(\hat{k}) \frac{\pi}{2} \delta(\bar{k} - k) \\ &= \frac{(2\pi)^3}{k^2} \delta(\bar{k} - k) \delta(\hat{\bar{k}} - \hat{k}) \\ &= (2\pi)^3 \delta(\bar{\mathbf{k}} - \mathbf{k}).\end{aligned}$$

5.3 Bestimmung der Kontinuum-Greenfunktion

Mit der Diskretisierung der Kontinuumszustände und der Bestimmung der dazugehörigen Kontinuumswellenfunktionen sind die Grundlagen konstruiert, um eine Beschreibung der Kernphysik mit Hilfe der Greenfunktion zu beginnen. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten angewandt, um die Greenfunktion für das diskretisierte Kontinuum herzuleiten.

Die allgemeine Greenfunktion $G^{(+)}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ kann als Summe aus einem Anteil des diskreten Spektrum und einen Anteil aus dem kontinuierlichen Spektrum geschrieben werden:

$$G = G_d + G_c.$$

Als Ausgangspunkt der Herleitung für die Kontinuum-Greenfunktion dient ihre Lehmann Darstellung:

$$G_c^{(+)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\chi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \tilde{\chi}^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')}{E(k) - \omega - i\eta}.$$

Betrachtet man den Kontinuumanteil der Greenfunktion $G_c^{(+)}$, so kann mit Hilfe der Partialwellendarstellung der Radialanteil vom Winkelanteil getrennt werden:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_c^{(+)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \delta_{m_s m'_s} \sum_{lm} \frac{\hbar^2}{2m} g_{lj}(\omega, r, r') Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^\dagger(\hat{r}') \tilde{\xi}_{s'}^\dagger \xi_s \delta_{ss'} \\ G_c^{(+)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{4\pi}{2\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} \delta_{m_s m'_s} \sum_{lm} g_{lj}^{(+)}(q, r, r') Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^\dagger(\hat{r}')\end{aligned}$$

mit $q = -\frac{m}{\hbar}(\omega + i\eta)$. Hierbei sind $G_c^{(+)}$ die Diagonalelemente von $\tilde{G}_c^{(+)}$.

Der Radialanteil der Greenfunktion $g_{lj}^{(+)}$ ist ausschließlich von der Radialwellenfunktion φ_l abhängig:

$$g_l^{(+)}(q, r, r') = \int_0^\infty \frac{dk k^2}{k^2} \frac{\varphi_{lj}(k, r) \varphi_{lj}^\dagger(k, r')}{k^2 + q^2}.$$

Durch Anwendung der Diskretisierung der Kontinuumszustände kann das kontinuierliche Integral über den Impulsraum in eine Summe von Integralen über Impulsintervalle $\Delta k = [k_n, k_{n+1}]$ zerlegt werden:

$$g_l^{(+)}(q, r, r') = \sum_n \int_{k_n}^{k_{n+1}} dk \frac{\varphi_l(k, r) \varphi_l^\dagger(k, r')}{k^2 - q^2}. \quad (5.8)$$

In Δk wird die Wellenfunktion durch diejenige bei $k = k_n$ ersetzt:

$$\varphi_{lj}(k, r) = \frac{1}{A_l(k_n)} F_{lj}(k_n, r). \quad (5.9)$$

Einsetzen von (5.9) in (5.8) liefert den Radialanteil der Greenfunktion $g_{lj}^{(+)}$ über das diskretisierte Kontinuum:

$$\begin{aligned} g_{lj}^{(+)}(q, r, r') &= \sum_n \frac{1}{A_{lj}^2(k_n)} \int_{k_n}^{k_{n+1}} \frac{dk}{k^2 + q^2} F_{lj}(k_n, r) F_{lj}(k_n, r') \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k_0} \sum_n \Delta k_n \left(1 + \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta_l}{\partial k} \Big|_{k_n} \right) F_{lj}(k_n, r) F_{lj}(k_n, r') P_{lj}(k_n, q) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} P_{lj}(k_n, q) &= \frac{1}{\Delta k_n} \int_{k_n}^{k_{n+1}} \frac{dk}{k^2 + q^2} \\ &= \frac{1}{\Delta k_n q} \arctan \left(q \frac{k_{n+1} - k_n}{q^2 + k_n k_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta k_n q} \arctan \left(\frac{q \Delta k_n}{q^2 + k_n k_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.3) kann der phasenabhängigen Teil eliminiert werden:

$$g_{lj}(q, r, r') = \frac{\pi}{2} \sum_n F_{lj}(k_n, r) F_{lj}(k_n, r') P_{lj}(k_n, q).$$

Betrachtet man den Grenzwert einer dichten Diskretisierung $\Delta k_n \rightarrow 0$ (d.h. für $R_\infty \rightarrow \infty, A_l^2 \rightarrow \frac{2}{\pi} dk$) wirkt sich diese auf die Funktion P_{lj} aus:

$$P_{lj}(k_n, q) \xrightarrow{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n^2 + q^2}$$

Mit der Beziehung (5.3) und der Beobachtung:

$$\left| \frac{\partial \delta}{\partial k} \right| \leq \pi \Rightarrow \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta}{\partial k} \xrightarrow{R_\infty \rightarrow \infty} 0$$

folgt somit:

$$k_0 = \Delta k_n = dk \quad \text{für } R_\infty \rightarrow \infty.$$

Für den Radialanteil der Greenfunktion g_l ergibt sich hierdurch:

$$g_{lj}(q, r, r') = \sum_n \frac{2}{\pi} \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{\pi} \frac{\partial \delta}{\partial k}} \varphi_{lj}(k_n, r) \varphi_{lj}^\dagger(k_n, r') P_l(k_n, q)$$

$$\xrightarrow{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int dk \frac{\varphi_{lj}(k, r) \varphi_{lj}^\dagger(k, r')}{k^2 + q^2}.$$

In Folge dessen kann die gesamte Kontinuum-Greenfunktion $G_c^{(+)}$ zusammengefasst werden:

$$G_c^{(+)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = N_s 4\pi \delta_{m_s m'_s} \sum_{lm} Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}') \frac{N(k_0)}{k_0} g_{lj}(q, r, r')$$

mit $N_s = 2$ und der Zustandsdichte N bei k_0 d.h. im diskretisierten Volumen $V(R_\infty)$:

$$N(k_0) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{mk_0}{\hbar^2} \quad \left[\frac{1}{\text{MeVfm}^3} \right].$$

Eine interessante Größe, die die Niveaudichte im Kontinuum beschreibt ist [44]:

$$N_{lj}(E) = (2j + 1) \frac{1}{\pi} \left| \frac{d\delta_{lj}}{dE} \right|.$$

In der Nähe von Resonanzen gilt:

$$\delta_{lj}(E) \sim \arctg \left(\frac{\frac{\Gamma_{lj}}{2}}{E - E_N^{lj}} \right)$$

und N_{lj} verhält sich näherungsweise einer Lorenzkurve mit Breite Γ_{lj} . Auch abseits von Resonanzen wird N_{lj} von der Dynamik des Systems bestimmt. Dies sieht man in Abbildung 5.1 (oben) anhand der Abweichungen der Zustandsdichte vom rein geometrischen Limes $\Delta E \sim \frac{1}{R^2}$. Insbesondere ergibt sich eine starke erhöhte Zustandsdichte im Bereich der Resonanz (siehe Abbildung 5.1 unten).

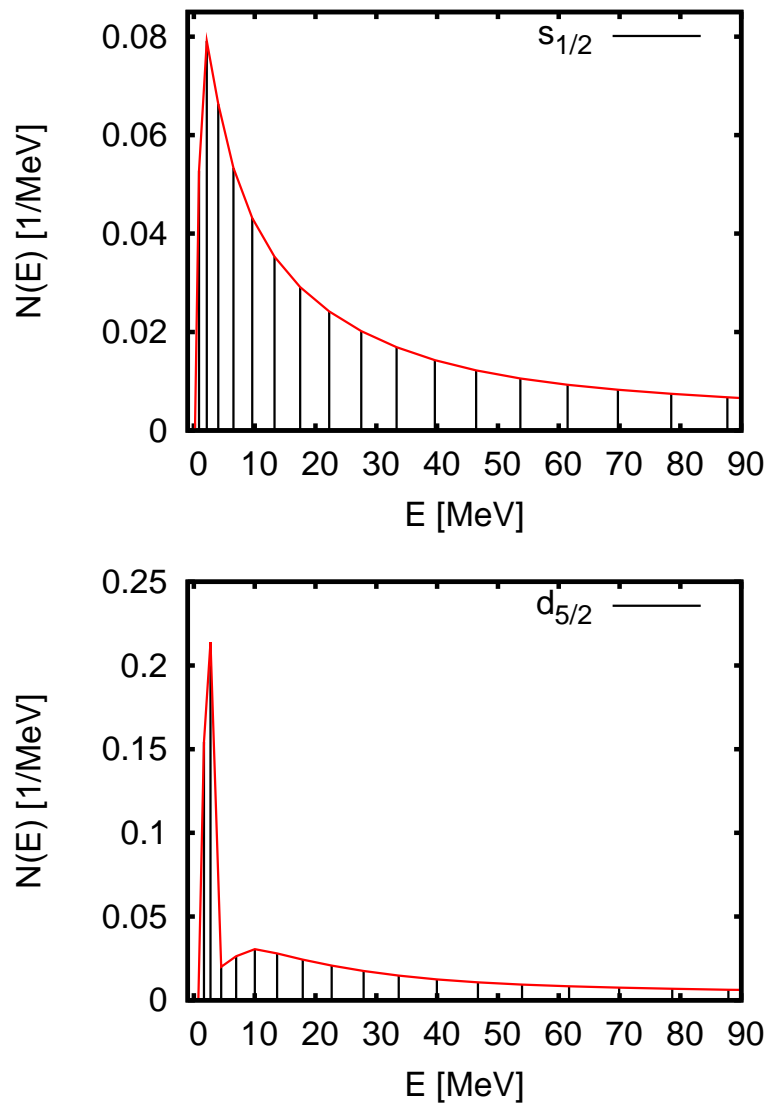


Abbildung 5.1: Beispiele für berechneten Kontinuumsniveaudichten für ^{56}Fe .

6

QRPA im Kontinuum

6.1 Kontinuumsanteil des Polarisationspropagators

Mit der Greenfunktion G , als Werkzeug zur Untersuchung von allgemeinen wechselwirkenden Vielteilchensystem und im speziellen von Kernen, kann das Anregungsspektrum des Systems bestimmt werden. Um diesen Rahmen zu erweitern, beispielsweise zur Bestimmung von Wirkungsquerschnitten und Anregungen durch externe Felder, benötigt man Informationen über den Polarisationspropagator Π . Ziel dieser Arbeit ist es den Polarisationspropagator Π zu bestimmen, hierfür wird in diesem Kapitel der Polarisationspropagator zum einen für das diskrete Spektrum $\Pi^{(d)}$ und für das kontinuierliche Spektrum $\Pi^{(c)}$ bestimmt. Um zusätzlich die in der Kernphysik auftauchende Paarbildung zu berücksichtigen wird durch Transformation der Hartree-Fock-Zustände in Quasiteilchen-Zustände mit Hilfe der Bogolyubov-Transformation eine Transformation vom Teilchenbild in das Quasiteilchenbild eingeführt.

Die neuen Quasiteilchen-Zustände lassen sich mit Hilfe der Bogolyubov-Transformations Koeffizienten u und v darstellen:

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \varphi_{HF}.$$

In der vollen QRPA- und BCS-Approximation muss der Polarisationspropagator:

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega) = \langle 0 | U_{\alpha}^{\dagger} G_0(\omega) U_{\beta} | 0 \rangle$$

mit der unkorrelierten Greenfunktion G_0 in diesen neuen Quasiteilchen-Zuständen entwickelt werden.

Der Polarisationspropagator $\Pi_{\alpha\beta}$ kann in einen direkten Anteil $\Pi^{(d)}$ und einen Kontinuumsanteil $\Pi^{(c)}$ aufgeteilt werden. Der diskrete Anteil $\Pi^{(d)}$ ist über die gebundenen Zustände durch:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(d)} = \sum_{\lambda=(j_1 j_2), j_1 \leq j_2} \Theta(-\mu_1 - E_{j_1}) \Theta(-\mu_2 - E_{j_2}) U_{\lambda\alpha}^* U_{\lambda\beta} \left(\frac{1}{E_{\lambda} - \omega} + \pi_{\alpha\beta} \frac{1}{E_{\lambda} + \omega} \right)$$

mit den reduzierten Matrixelementen $U_{\lambda\alpha}^* = \langle 0 | U_{\alpha}^{\dagger} | \lambda \rangle = \langle j_1 | U_{\alpha}^{\dagger} | j_2 \rangle (u_{j_1} v_{j_2} + s_{\alpha} v_{j_1} u_{j_2})$ gegeben. Hierbei sind die Energien $E_{\lambda} = E_{j_1} + E_{j_2}$ und der Phasenfaktor $\pi_{\alpha\beta} = (-)^{s_{\alpha} + s_{\beta}}$ folgt aus den Zeitumkehrigenschaften der spinabhängigen ($s_{\alpha} = 1$) Operatoren.

Der Kontinuumsanteil $\Pi_{\alpha\beta}^{(c)}$ resultiert aus $E_{j_2} \geq |\mu_2|$ d.h. $\varepsilon_{j_2} = \mu_2 + E_{j_2} \geq 0$ (mit $\mu_1, \mu_2 < 0$ für gebundenen Zustände). Durch umsordern der Summation mit

$E_{j_1} < |\mu_1|$ und $E_{j_2} \geq |\mu_2|$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 2\Pi_{\alpha\beta}^{(c)}(E) &= \sum_{\lambda=(j_1j_2)} \Theta(-\mu_1 - E_{j_1}) \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} U_{\alpha\lambda}(k) U_{\beta\lambda}(k) 4\pi\Theta(\mu_2 + E_{j_2}) \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{E_\lambda^{(2)}(k) + \Sigma_\lambda(E) - E} + \frac{\pi_{\alpha\beta}}{E_\lambda(k) + \Sigma_\lambda^*(E) + E} \right] \\
 &+ \sum_{\lambda=(j_1j_2)} \Theta(-\mu_2 - E_{j_2}) \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} U_{\alpha\lambda}^*(k) U_{\beta\lambda}(k) 4\pi\Theta(\mu_1 + E_{j_1}) \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{E_\lambda^{(1)}(k) + \Sigma_\lambda(E) - E} + \frac{\pi_{\alpha\beta}}{E_\lambda(k) + \Sigma_\lambda^*(E) + E} \right]
 \end{aligned}$$

mit der hier eingeführten zusätzlichen dispersiven Zweiquasiteilchenpolarisationselbstenergie Σ_λ :

$$\Sigma_\lambda(\omega) = \Delta_\lambda(\omega) - i\frac{1}{2}\Gamma_\lambda(\omega)$$

welche der Dissipation der Zweiquasiteilchenzustände durch die Kopplung an höhere Ordnungskonfiguration zu genügt. Eine genaue Diskussion der zugrundeliegenden physikalischen Sachverhalts erfolgt später.

Die Quasiteilchenenergien lassen sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 E_\lambda^{(2)}(k) &= \varepsilon_{j_2}^{(+)}(k) + E_{j_1} - \mu_2 \\
 &= \varepsilon_{j_2}^{(+)} - \varepsilon_{j_1}^{(-)} + \mu_1 - \mu_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\lambda^{(1)}(k) &= \varepsilon_{j_1}^{(+)}(k) + E_{j_2} - \mu_1 \\
 &= \varepsilon_{j_1}^{(+)} - \varepsilon_{j_2}^{(-)} - (\mu_1 - \mu_2)
 \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_{j_i}^{(\pm)} = \mu_i \pm E_{j_i}$. Die Polstellen des Propagators Π liegen in der komplexen Ebene bei:

$$E = \pm (E_\lambda + \Delta_\lambda(E)) - \frac{i}{2}\Gamma_\lambda(E).$$

Somit folgt für die Spektralfunktion A_λ für Zwei quasiteilchenpaare $\lambda = (j_1 j_2)$:

$$A_\lambda(E) = \frac{C_\lambda \Gamma_\lambda(E)}{\pi} \left[\frac{1}{(\tilde{E}_\lambda - E)^2 + \frac{\Gamma_\lambda^2}{4}} - \frac{1}{(\tilde{E}_\lambda + E)^2 + \frac{\Gamma_\lambda^2}{4}} \right].$$

Die Normierungskonstante C_λ wird über die Bedingung

$$\int_0^\infty dE A_\lambda(E) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_\mu} = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2\tilde{E}_\lambda}{\Gamma_\lambda} \right) \Big|_{E_\lambda} \leq 1$$

bestimmt.

In dem hier gewonnenen Kontinuumsanteil des Polarisationspropagators $\Pi^{(c)}$ wird die Impulsintegration über k durch eine Summe von Integralen über das diskretisierte Kontinuumintervall Δk_n ersetzt. Es werden zusätzlich normierte Matrixelemente $M_{\alpha\lambda}$ eingeführt:

$$U_{\alpha\lambda}(k) = \frac{1}{A_{j_2}(k_n)} M_{\alpha\lambda}(k_n) \quad k \in \Delta k_n.$$

Durch Extraktion des Faktors $\frac{2m}{\hbar^2}$ werden die Energien in Impulse ($\mu_i < 0!$) konvertiert:

$$\begin{aligned} 2\Pi_{\alpha\beta}^{(c)}(E) = & \sum_{\lambda=(j_1 j_2)} \sum_n \frac{N(k_0)}{k_0} M_{\alpha\lambda}^*(k_n) M_{\beta\lambda}(k_n) 4\pi^2 \\ & \times \left[\Theta(|\mu_1| - E_{j_1}) \left(p_{j_2}(k_n, E) + \pi_{\alpha\beta} p_{j_2}^*(k_n, -E) \right) \right. \\ & \left. + \Theta(|\mu_2| - E_{j_2}) \left(p_{j_1}(k_n, E) + \pi_{\alpha\beta} p_{j_1}^*(k_n, -E) \right) \right]. \end{aligned}$$

Mit

$$p_j(k_n, E) = \frac{1}{\Delta k_n} \int_{k_n}^{k_{n+1}} dk \frac{1}{k^2 + q_j^2(E)}$$

und

$$\frac{\hbar^2}{2m} q_{j_1}^2(E) = E_{j_2} + \Delta_{j_1 j_2}(E) - \frac{i}{2} \Gamma_{j_1 j_2}(E) - E - \mu_1$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} q_{j_2}^2(E) = E_{j_1} + \Delta_{j_1 j_2}(E) - \frac{i}{2} \Gamma_{j_1 j_2}(E) - E - \mu_2$$

was zu:

$$p_j(k_n, q_j) = \frac{1}{q_j \Delta k_n} \arctan \left(\frac{q_j \Delta k_n}{q_j^2 + k_n k_{n+1}} \right).$$

führt. Insgesamt ergibt sich also die folgende Energieabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(c)}(E) = & 2\pi^2 \frac{N(k_0)}{k_0} \sum_{\lambda=(j_1j_2)} \sum_n M_{\alpha\lambda}^*(k_n) M_{\beta\lambda}(k_n) \\ & \times \left[\Theta(E_{j_2}(k_n) + \mu_2) \Theta(|\mu_1| - E_{j_1}) \left(p_{j_2}(k_n, q_{j_2}) + \pi_{\alpha\beta} p_{j_2}^*(k_n, \bar{q}_{j_2}) \right) \right. \\ & \left. + \Theta(E_{j_1}(k_n) + \mu_1) \Theta(|\mu_2| - E_{j_2}) \left(p_{j_1}(k_n, q_{j_1}) + \pi_{\alpha\beta} p_{j_1}^*(k_n, \bar{q}_{j_1}) \right) \right] \end{aligned}$$

mit $\bar{q}_j(E) = q_j(-E)$.

Für die normale QRPA (d.h. ohne $p^{-1}n$ und $n^{-1}p$ Ladungsaustauschmoden) erhält man $\mu_1 = \mu_2$ und das Verschwinden der zwei Fallunterscheidungen. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(c)}(E) = & 4\pi^2 \frac{N(k_0)}{k_0} \sum_{\lambda=(j_1j_2)} \sum_n M_{\alpha\lambda}^*(k_n) M_{\beta\lambda}(k_n) \\ & \times \Theta(|\mu_\lambda| - E_{j_1}) \Theta(\mu_\lambda - E_{j_2}) \left(p_{j_2}(k_n, q_{j_2}) + \pi_{\alpha\beta} p_{j_2}^*(k_n, \bar{q}_{j_2}) \right) \end{aligned}$$

wobei μ_λ hierbei das chemische Potential für Protonen bzw. Neutronen in Abhängigkeit vom Isospin des Zweiquasiteilchenzustandes λ ist.

6.2 Kontinuum-Antwort Funktion für Ladungsaustauschanregungen

Im Folgenden wird die allgemeine Untersuchung von Kernanregungen verlassen und auf den Spezialfall der Ladungsaustauschanregungen konzentriert. Zunächst wird der allgemeine Operator für diese Anregungen am Kern eingeführt und anschließend gezeigt, wie im diesem speziellen Fall der Polarizaitonspropagator bestimmt werden kann.

Ladungsaustauschanregungen am Kern spiegeln sich im Isospinkanal des Systems wieder, somit bietet sich für den für die Reaktion in Verbindung stehenden Operator $T_{\lambda\mu}$:

$$T_{\lambda\mu}(m, \xi) = T_{\lambda\mu}(\xi) \tau_m \quad (\xi = (\vec{r}, \vec{\sigma}))$$

mit $m = 0, \pm 1$ als Ansatz an. $\xi = (\mathbf{r}, \Delta, \sigma)$ bezeichnet hierbei alle weiteren Operatoren des Systems. Für die beiden Isospinkanäle $p \rightarrow n$ und $n \rightarrow p$ gilt jeweils der entsprechende Operator τ_+ bzw. τ_- . Diese Operatoren lassen sich in zweiter Quantisierung darstellen:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}(+, \xi) &= \sum_{pn} \langle n | T_{\lambda\mu}(\xi) | p \rangle \langle n | \tau_+ | p \rangle a_n^\dagger a_p \\ T_{\lambda\mu}(-, \xi) &= \sum_{pn} \langle p | T_{\lambda\mu}(\xi) | n \rangle \langle p | \tau_- | n \rangle a_p^\dagger a_n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Phasenkonvention für sphärische Tensoren:

$$T_{\lambda\mu}^\dagger(\xi) = (-)^{\lambda+s+\mu} T_{\lambda-\mu}(\xi)$$

$$\tau_{\pm} = \tau_{\mp}^\dagger$$

findet man sofort die Relation

$$T_{\lambda\mu}^\dagger(+, \xi) = (-)^{\lambda+s+\mu} T_{\lambda-\mu}(-, \xi).$$

Somit folgt für die Matrixdarstellung:

$$\begin{aligned} \langle j_n m_n | T_{\lambda\mu} | j_p m_p \rangle &= \langle j_p m_p | T_{\lambda\mu}^\dagger | j_n m_n \rangle^* \\ &= (-)^{\lambda+\mu+s} \langle j_p m_p | T_{\lambda-\mu} | j_n m_n \rangle^* \\ &= (-)^{\lambda+\mu+s} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} || j_n \rangle^* (-)^{j_n - m_n} (j_p m_p j_n - m_n | \lambda - \mu) \end{aligned}$$

und mittels des Wigner-Eckhart-Theorems (siehe [23]):

$$\langle j_p m_p | T_{\lambda\mu} | j_n m_n \rangle = \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} || j_n \rangle (-)^{j_n - m_n} (j_p m_p j_n - m_n | \lambda - \mu)$$

so dass für den Operator $T_{\lambda\mu}$ in zweiter Quantisierung

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}(+, \xi) &= \sum_{j_p j_n} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} || j_n \rangle \langle n | \tau_+ | p \rangle (-)^{\lambda+\mu+s} \\ &\quad \times \sum_{m_n m_p} (-)^{j_p + m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) a_{j_n - m_n}^\dagger a_{j_p m_p} \end{aligned}$$

gilt.

Durch Einführung des Operators A^\dagger für Teilchen-Loch-Anregungen:

$$A_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_n) = \sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) a_{j_p m_p}^\dagger \tilde{a}_{j_n m_n}$$

mit der Notation:

$$\tilde{a}_{jm} = (-)^{j+m} a_{j-m}$$

folgt für $T_{\lambda\mu}(+, \xi)$:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}(+, \xi) &= \sum_{j_p j_n} \frac{1}{\hat{\lambda}} (-)^s \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* (-)^{\lambda+\mu} A_{\lambda-\mu}^\dagger(j_p j_n) \\ &= \sum_{j_p j_n} \frac{(-)^s}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* \tilde{A}_{\lambda-\mu}^\dagger(j_p j_n) \end{aligned}$$

und entsprechend für $T_{\lambda\mu}(-, \xi)$:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}(-, \xi) &= \sum_{j_p j_n} \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* A_{\lambda-\mu}^\dagger(j_p j_n) \\ &= (-)^{\lambda+s+\mu} T_{\lambda-\mu}^\dagger(+, \xi). \end{aligned}$$

Zur Untersuchung von endlichen Kernen ist zu beachten, dass im Kern Paarungseffekte auftreten. Analog zur Theorie der Supraleitung wird hierfür mit Hilfe der Bogulubov-Transformation vom Teilchenbild ins Quasiteilchenbild transformiert. Für die Einteilchen-Dichtematrizen folgt:

$$\begin{aligned} a_p^\dagger \tilde{a}_n &= (u_p a_p^\dagger + v_p \tilde{a}_p)(u_n \tilde{a}_n - v_n a_n^\dagger) \\ &= -(u_p v_n a_p^\dagger a_n^\dagger + v_p u_n \tilde{a}_n \tilde{a}_p) + S(\alpha^\dagger, \tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n^\dagger a_p &= (u_n \tilde{a}_n^\dagger - v_n a_n)(u_p a_p - v_p \tilde{a}_p^\dagger) \\ &= -(v_p u_n \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_n^\dagger + u_p v_n a_n a_p) + S(\alpha^\dagger, \tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

wobei $S(\alpha^\dagger, \tilde{\alpha})$ Quasiteilchenoperatoren sind und der Quasiteilchenpaaroperator Q^\dagger eingeführt:

$$Q_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_n) = \sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) \alpha_{j_p m_p}^\dagger \alpha_{j_n m_n}^\dagger.$$

Mit

$$(-)^{\lambda+\mu} Q_{\lambda\mu}(j_p j_n) = \sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda - \mu) \tilde{\alpha}_n^\dagger \tilde{\alpha}_p^\dagger$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) \tilde{\alpha}_n \tilde{\alpha}_p &= \sum_{m_p m_n} (-)^{j_n - m_n + j_p - m_p} (j_p - m_p j_n - m_n | \lambda \mu) \alpha_{j_n m_n} \alpha_{j_p m_p} \\ &= (-)^{-\lambda+\mu} Q_{\lambda-\mu}(j_p j_n) \\ &= (-)^{\lambda+\mu} Q_{\lambda-\mu}(j_p j_n) \\ &= \tilde{Q}_{\lambda\mu}(j_p j_n) \end{aligned}$$

folgt:

$$\tilde{Q}_{\lambda\mu}(j_p j_n) = (-)^{\lambda+\mu} Q_{\lambda-\mu}(j_p j_n).$$

Für den Teilchen-Loch-Operator A^\dagger folgt somit in Quasiteilchendarstellung:

$$A_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_n) = - \left(u_p v_n Q_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_n) + v_p u_n \tilde{Q}_{\lambda\mu}(j_p j_n) \right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\lambda\mu}(j_p j_n) &= - \left(v_p u_n Q_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_n) + u_p v_n \tilde{Q}_{\lambda\mu}(j_p j_n) \right) \\ &= (-)^{\lambda+\mu} A_{\lambda-\mu}(j_p j_n).\end{aligned}$$

Mit Hilfe des QRPA Zustandsoperators Ω_c^\dagger :

$$\Omega_{J_c M_c}^\dagger(c) = \sum_{j_n j_p} (x_{pn}^c Q_{J_c M_c}^\dagger(j_p j_n) - y_{pn}^c \tilde{Q}_{J_c M_c}(j_p j_n))$$

und des Übergangsopters $T_{\lambda\mu}$ gilt für den Übergänge aus dem Grundzustand $|0\rangle$:

$$T_\lambda^c(-) = \langle 0 | \Omega_{J_c M_c} T_{\lambda\mu}(-) | 0 \rangle \delta_{J_c \lambda}^{M_c \mu}$$

$$T_\lambda^c(+) = \langle 0 | \Omega_{J_c M_c} T_{\lambda\mu}^\dagger(+) | 0 \rangle \delta_{J_c \lambda}^{M_c \mu}.$$

Somit folgt für die Übergangsmatrixelemente:

$$T_\lambda^c(-) = - \sum_{j_p j_n} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_\lambda \tau_- || j_n \rangle (u_p v_n x_{pn}^c + v_p u_n y_{pn}^c)$$

$$T_\lambda^c(+) = - \sum_{j_p j_n} \frac{(-)^s}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_\lambda \tau_- || j_n \rangle^* (v_p u_n x_{pn}^c + u_p v_n y_{pn}^c).$$

Zusätzlich gilt die Relation:

$$\begin{aligned}T_\lambda^c(+) &= \langle 0 | T_{\lambda\mu}^\dagger(+) \Omega_c^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T_{\lambda-\mu}(-) \Omega_c^\dagger | 0 \rangle^* (-)^{s+\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

6.3 QRPA-Gleichung

Betrachten man die Zwei-Quasiteilchen Wechselwirkung so ergibt sich für die Multipole λ der Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}V_\tau &= \sum_{pn p' n'} \langle pn^{-1} | V_\tau | p' n'^{-1} \rangle a_p^\dagger a_n a_{n'}^\dagger a_{p'} \\ &= \sum_{pn p' n'} V_\lambda(pn, p' n') \langle p | T_{\lambda\mu} \tau_- | n \rangle \langle n' | T_{\lambda\mu}^\dagger \tau_+ | p' \rangle a_p^\dagger a_n a_{n'}^\dagger a_{p'}\end{aligned}$$

mit dem Radialintegral V_λ .

Mit dem obigen Ergebnis findet man:

$$\begin{aligned}\langle n' | T_{\lambda\mu}^\dagger \tau_+ | p' \rangle &= \langle p' | T_{\lambda\mu} \tau_- | n' \rangle^* \\ &= \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle p' || T_\lambda \tau_- || n' \rangle^* \\ &= (-)^{j_{n'} - m_{n'}} (j_{p'} m_{p'} j_{n'} - m_{n'} | \lambda \mu)\end{aligned}$$

und

$$V_\tau = \sum_{pn p' n' \lambda \mu} V_\lambda(pn, p' n') \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle p || T_\lambda \tau_- || n \rangle \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle p' || T_\lambda \tau_- || n' \rangle^* A_{\lambda\mu}^\dagger(j_p j_m) A_{\lambda\mu}(j_{p'} j_{m'}).$$

Es ist anzumerken, dass der Phasenfaktor $(-)^s$ in unserer Phasenkonvention nicht explizit auftaucht! Zur Bestimmung der QRPA-Amplituden x_α und y_α wird der Kommutator der Wechselwirkung V_τ mit dem QRPA-Operator Ω_c^\dagger berechnet:

$$[V_\tau, \Omega_c^\dagger] \rightarrow A_{\lambda\mu}^\dagger [A_{\lambda\mu}, \Omega_c^\dagger] + [A_{\lambda\mu}^\dagger, \Omega_c^\dagger] A_{\lambda\mu}$$

mit

$$\begin{aligned}[A_{\lambda\mu}^\dagger(pn), \Omega_c^\dagger] &= (-)^{\lambda+\mu} [\tilde{A}_{\lambda-\mu}^\dagger, \Omega_c^\dagger] \\ &= (-)^{\lambda+\mu} [\Omega_c^\dagger, \tilde{A}_{\lambda-\mu}^\dagger] \\ &= (x_{pn} v_p u_n + y_{pn} u_p v_n)^* (-)^{\lambda+\mu} \delta_{M_c - \mu}\end{aligned}$$

und

$$[A_{\lambda\mu}(pn), \Omega_c^\dagger] = (x_{pn} u_p v_n + y_{pn} v_p u_n)^* (-)^{\lambda+\mu} \delta_{M_c \mu}.$$

Durch Entwicklung der Wechselwirkung V_λ nach den Eigenfunktionen f_λ :

$$V_\lambda(pn, p' n') \sim f_\lambda(pn) f_\lambda(p' n') \kappa_\lambda$$

mit

$$\begin{aligned}\langle f_{k\lambda} | V_\lambda | f_{k'\lambda} \rangle &= \delta_{kk'} \kappa_{k\lambda} \\ \Rightarrow V_\lambda(r, r') &= \sum_k \kappa_{k\lambda} f_{k\lambda}(r) f_{k\lambda}(r') \\ \Rightarrow V_\lambda(pn, p' n') &= \sum_k \kappa_{k\lambda} f_{k\lambda}(pn) f_{k\lambda}(p' n')\end{aligned}$$

und der Einführung der Feldamplituden $F_{\lambda c}$:

$$\frac{1}{\kappa_\lambda} F_{\lambda c}(+) = \sum_{pn} U_\lambda^*(pn) (-)^s (x_{pn} v_p u_n + y_{pn} u_p v_n) \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{\kappa_\lambda} F_{\lambda c}(-) = \sum_{pn} U_\lambda(pn) (x_{pn} u_p v_n + y_{pn} v_p u_n) \quad (6.2)$$

mit $U_\lambda(pn) = \frac{1}{\lambda} \langle p || T_\lambda \tau_- || n \rangle f_\lambda(pn)$ folgt für den Kommutator:

$$\begin{aligned} [V_\tau, \Omega_c^\dagger] &= \sum_{pn, \lambda\mu} U_\lambda(pn) (-)^s \left[(-)^s F_{\lambda c}(-) A_{\lambda\mu}^\dagger(pn) + F_{\lambda c}(+) \tilde{A}_{\lambda\mu}(pn) \right] \\ &= \sum_{pn, \lambda\mu} U_\lambda(pn) (-)^s \left[((-)^s F_{\lambda c}(-) u_p v_n + F_{\lambda c}(+) v_p u_n) Q_{\lambda\mu}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + ((-)^s F_{\lambda c}(-) v_p u_n + F_{\lambda c}(+) u_p v_n) \tilde{Q}_{\lambda\mu}^\dagger \right]. \end{aligned}$$

Hieraus wird die QRPA-Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= -\frac{1}{E_\mu - E} \sum_\lambda U_{\lambda\alpha} (-)^{s_\lambda} \left((-)^{s_\lambda} F_{\lambda c}(-) r_\alpha + F_{\lambda c}(+) t_\alpha \right) \\ y_\alpha &= -\frac{1}{E_\mu + E} \sum_\lambda U_{\lambda\alpha} (-)^{s_\lambda} \left((-)^{s_\lambda} F_{\lambda c}(-) t_\alpha + F_{\lambda c}(+) r_\alpha \right) \end{aligned}$$

mit $r_\alpha = r_{pn} = u_p v_n$ und $t_\alpha = t_{pn} = v_p u_n$. Einfügen dieser Ausdrücke in (6.1) und (6.2) ergibt ein Gleichungssystem für die Feldamplituden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_\lambda} F_{\lambda c}(+) &= -\sum_\alpha U_{\lambda\alpha} (-)^{s_\lambda} \frac{t_\alpha}{E_\alpha - E} \sum_\gamma U_{\gamma\alpha} (F_{\gamma c}(-) r_\alpha + (-)^{s_\gamma} F_{\gamma c}(+) t_\alpha) \\ &\quad - \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} (-)^{s_\lambda} \frac{r_\alpha}{E_\alpha + E} \sum_\gamma U_{\gamma\alpha} (F_{\gamma c}(-) t_\alpha + (-)^{s_\gamma} F_{\gamma c}(+) r_\alpha) \\ &= -\sum_\gamma F_{\gamma c}(+) \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\gamma\alpha} (-)^{s_\lambda + s_\gamma} \left(\frac{t_\alpha^2}{E_\alpha - E} + \frac{r_\alpha^2}{E_\alpha + E} \right) \\ &\quad - \sum_\gamma F_{\gamma c}(-) \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\gamma\alpha} (-)^{s_\gamma} \left(\frac{r_\alpha t_\alpha}{E_\alpha - E} + \frac{r_\alpha t_\alpha}{E_\alpha + E} \right) \end{aligned}$$

und entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\kappa_\lambda} F_{\lambda c}(-) &= - \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} \frac{r_\alpha}{E_\alpha - E} \sum_\gamma U_{\gamma\alpha} (F_{\gamma c}(-) r_\alpha + (-)^{s_\gamma} F_{\gamma c}(+) t_\alpha) \\
 &\quad - \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} \frac{t_\alpha}{E_\alpha + E} \sum_\gamma U_{\gamma\alpha} (F_{\gamma c}(-) t_\alpha + (-)^{s_\gamma} F_{\gamma c}(+) r_\alpha) \\
 &= - \sum_\gamma F_{\gamma c}(-) \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\gamma\alpha} \left(\frac{r_\alpha^2}{E_\alpha - E} + \frac{t_\alpha^2}{E_\alpha + E} \right) \\
 &\quad - \sum_\gamma F_{\gamma c}(+) \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\gamma\alpha} (-)^{s_\gamma} \left(\frac{r_\alpha t_\alpha}{E_\alpha - E} + \frac{r_\alpha t_\alpha}{E_\alpha + E} \right).
 \end{aligned}$$

Die Suszeptibilitätsmatrix $\Pi_{\tau\lambda,\tau'\lambda'} \equiv \Pi_{\lambda\lambda'}(\tau, \tau')$ ist durch:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\lambda,\lambda'}(+, +) &= \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\lambda'\alpha} \left(\frac{t_\alpha^2}{E_\alpha - E} + \frac{r_\alpha^2}{E_\alpha + E} \right) \\
 \Pi_{\lambda,\lambda'}(+, -) &= \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\lambda'\alpha} t_\alpha r_\alpha \left(\frac{1}{E_\alpha - E} + \frac{1}{E_\alpha + E} \right) \\
 \Pi_{\lambda,\lambda'}(-, +) &= \Pi_{\lambda,\lambda'}(+, -) \\
 \Pi_{\lambda,\lambda'}(-, -) &= \sum_\alpha U_{\lambda\alpha} U_{\lambda'\alpha} \left(\frac{r_\alpha^2}{E_\alpha - E} + \frac{t_\alpha^2}{E_\alpha + E} \right) = \Pi_{\lambda\lambda'}(+, +)|_{-E}
 \end{aligned}$$

definiert. Durch einfügen des Phasenfaktors $(-)^s F_\lambda(+) \rightarrow F_\lambda(+)(-)^{s_\lambda}$ erhält man:

$$\sum_{\tau'\lambda'} \left(\delta_{\lambda\lambda'}^{\tau\tau'} \frac{1}{\kappa_\lambda} + \Pi_{\tau\lambda,\tau'\lambda'}(E) \right) F_{\tau'\lambda'} = 0$$

als zu lösendes Gleichungssystem.

Hieraus ergibt sich die Säkulargleichung:

$$d(E) = \det \left(\frac{1}{\kappa} \mathbb{1} + \Pi(E) \right) \Big|_{E_n} = 0,$$

die an den Eigenwerten $E = E_n$ Nullstellen besitzt, d.h. $d(E_n) = 0$.

7

Antwortfunktionen für Ladungsaustauschregungen an Kernen

Ziel dieser Arbeit ist es die Theorie der Struktur und die Dynamik von Kernen zu untersuchen und mit experimentellen Daten zu vergleichen, um ein genaueres Bild über die Kernwechselwirkung zu erhalten. Der β -Zerfall bietet hierzu einen Einblick auf den strukturellen Aufbau des Kerns, indem eine Betrachtung der Energiezustände möglich ist. Obwohl die Untersuchung instabiler Kerne eine Menge an Informationen bietet, ist durch die Untersuchung von Kernreaktionen ein viel detaillierter Blick auf die Struktur und Dynamik des Kerns möglich. Hierzu betrachten wir Ladungsaustauschanregungen, welche es ermöglichen Zustände im Isospinkanal zu untersuchen. Im Folgenden werden Antwortfunktionen $R(E)$ für Ladungsaustauschanregungen betrachtet. Diese geben zum einen Aufschluss über die spektrale Verteilung der Anregungszustände und zum anderen über die Stärke des jeweiligen, durch den Übergangsoperator T^+ induzierten, Übergang aus dem Grundzustand $|0\rangle$. Die Antwortfunktion kann mit Hilfe des im vorherigen Abschnitt vorgestellten Polarisationspropagators als Imaginärteil von Π bestimmt werden:

$$\begin{aligned} R(E) &= \sum_n |\langle 0|T^+|n\rangle|^2 \delta(E - E_n) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Im}(\Pi). \end{aligned}$$

Es werden Rechnungen für Kerne entlang dem Tal der Stabilität vorgestellt. Beginnend mit ^{12}C , als leichtesten Kern, wird über ^{24}Mg und ^{32}S die Entwicklung der Energiespektren in beiden Anregungskanälen bis ^{56}Fe untersucht. Diese Auswahl bietet nicht nur die Möglichkeit die Struktur entlang der Nuklidkarte zu betrachten, sondern durch den Vergleich von Spiegelkernen mit nicht-Spiegelkernen den Effekt der Proton-Neutron-Wechselwirkung zu analysieren. Für die ausgewählten Kerne wird das Anregungsspektrum zusätzlich mit vorhanden experimentellen Daten verglichen. Die Antwortfunktionen werden für natürliche Paritäten $\pi = (-1)^J$ (Fermi-Übergänge) und unnatürliche Paritäten $\pi = (-1)^{J+1}$ (Gamow-Teller-Übergänge) vorgestellt. Hierbei gibt es je nach Drehimpulskopplungszustand für die natürlichen Paritäten den $S = 0$ und $S = 1$ Kanal (siehe Abbildung 7.1) sowie für unnatürliche Paritäten den $L = J + 1$ und $L = J - 1$ Kanal (siehe Abbildung 7.2). Darüber hinaus wird die Entwicklung der Antwortfunktion in der Neutronen-Achse der Nuklidkarte am Beispiel der Isotopenkette von Nickel näher dargestellt.



Abbildung 7.1: Drehimpulskopplung für natürliche Paritäten. Links beim Übergang mit $S = 0$, rechts mit $S = 1$.

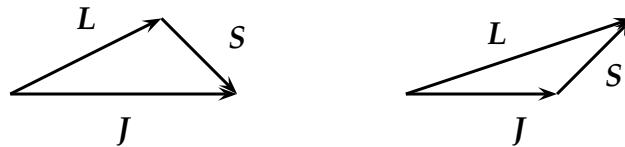


Abbildung 7.2: Drehimpulskopplung für unnatürliche Paritäten. Links beim Übergang mit $L = J + 1$, rechts mit $L = J - 1$.

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung des Systems bieten sogenannte Summenregeln. Sie ermöglichen eine modellunabhängige Vorschrift, welche aus algebraischen Relationen zwischen den Übergängen und dem Hamiltonoperator abgeleitet ist. Dies erlaubt globale Eigenschaften des Systems auf einer einfachen Weise zu berechnen. Summenregeln bieten zwar, im Vergleich zu RPA-Rechnungen, eine weniger detaillierte Aussage über das System, ermöglichen es aber, durch ihre einfache Berechnung, eine Verbindung zwischen verschiedenen Modellen herzustellen. Zwei der wichtigsten Summenregeln der Kernphysik bilden die nicht-energiegewichtete Summenregel S_0 und die energiegewichtete Summenregel S_1 :

$$S_n = \int_0^\infty dE E^n R(E) = \langle 0 | T_\lambda (H - E_0)^n T_\lambda | 0 \rangle$$

mit $n = 0, 1$.

Eine genauere Untersuchung der Summenregel zeigt, dass deren Erfüllung davon abhängt, welches Näherungsverfahren zur Behandlung quantenmechanischen Vielteilchensystems verwendet wird. So kann gezeigt werden, dass die Tamm Dancoff Approximation (TDA) [27] S_0 erfüllt und S_1 gebrochen ist, wohingegen in der RPA S_0 gebrochen ist und S_1 erfüllt wird. Das reine Schalenmodell ohne Restwechselwirkung hingegen erfüllt beide Summenregeln. Für eine umfassende Beschreibung wird dem Leser [49] nahegelegt.

Zur Untersuchung der Spektren bei Ladungsaustauschanregungen bieten sich die sogenannten Ikeda-Summenregeln [37] an. Sie stellen eine Verbindung zwischen den beiden Kanälen der Ladungsaustauschanregung (siehe Abbildung 2.2.3) für Fermi und Gamow-Teller artige Übergänge dar:

Fermi-Übergänge:

Gamow-Teller-Übergänge:

$$S_0(\tau_-) - S_0(\tau_+) = N - Z$$

$$S_0(\tau_-) - S_0(\tau_+) = 3(N - Z)$$

Für ein Verständnis der schwachen Wechselwirkung und für astrophysikalische Rechnungen ist neben den Anregungsenergien für Gamow-Teller-Übergänge die Stärke des Übergangs von zentraler Bedeutung. So kann mit Hilfe der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten für den Fermi- und Gamow-Teller-Übergang B_F und B_{GT} Aufschluss über den ft -Wert des Übergangs erhalten werden:

$$f_0 t_{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{B_F + B_{GT}}.$$

Diese Stärke ergibt sich über die kumulative Summenregel der jeweiligen Antwortfunktion:

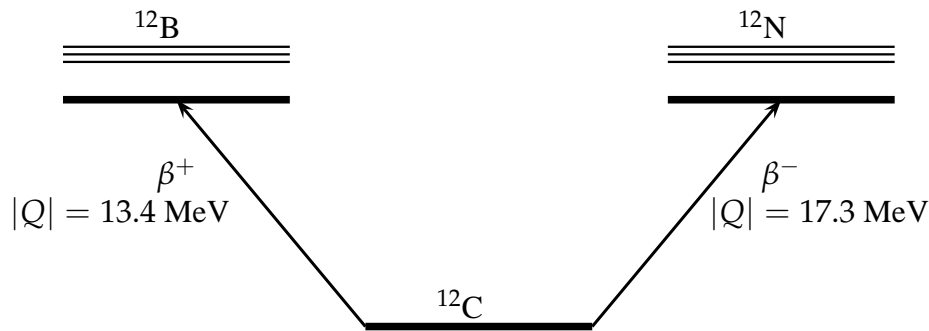
$$S_0(E) = \int_0^E dE' R(E')$$

und wird für den Fermi- und Gamow-Teller-Übergang der betrachteten Übergänge aufgezeigt. Hierbei kann über die Position der Stufe die Anregungsenergie bestimmt werden und deren Stärke über die Höhe der Stufe ermittelt werden.

Zum Abschluss des Abschnitts wird der Einfluß von Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen auf die Ladungsaustauschanregungen am Beispiel von ^{56}Fe untersucht.

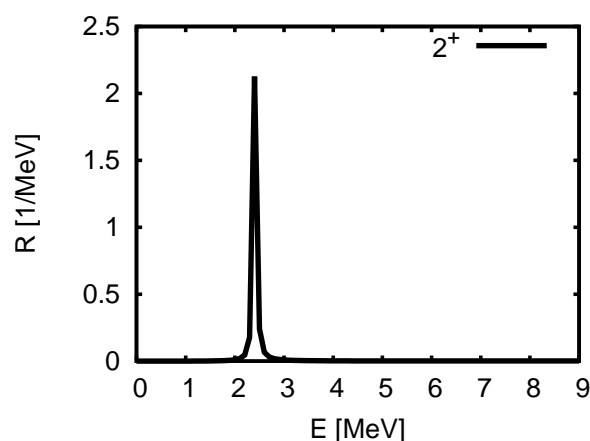
7.1 Kohlenstoff: ^{12}C

Kohlenstoff als Grundbaustein aller organischen Verbindungen definiert mit seinem Isotop ^{12}C die atomare Masseneinheit. Aus 6 Protonen und 6 Neutronen aufgebaut, können für Ladungsaustauschreaktionen an ^{12}C die beiden Isobare Bor ^{12}B und Stickstoff ^{12}N als mögliche Anregungskanäle erreicht werden (siehe Abbildung 7.3). Das Paar von Spiegelkernen bietet die Möglichkeit den Einfluss der Proton-Proton-Wechselwirkung und der Neutron-Neutron-Wechselwirkung auf die Struktur der Zustände zu untersuchen.

Abbildung 7.3: Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen an ^{12}C .

Abbildungen 7.4 bis 7.7 zeigen die Antwortfunktionen für die Reaktion $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$). Der Vergleich der Antwortfunktionen zeigt, dass bei unnatürlichen Paritäten neben dem 1^+ Grundzustand im Bereich von 2 MeV bei $L = J + 1$ ein weiterer 1^+ Zustand bei 4 MeV mit $L = J - 1$ erkennbar ist. Bei natürlichen Paritäten liegen sowohl für $S = 0$ als auch $S = 1$ die beiden 2^+ Zustände im Bereich von 2 MeV.

Abbildung 7.9 bis 7.12 zeigen die Antwortfunktionen für die entgegengesetzte Reaktion $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N}$ ($n \rightarrow p$). Hier liegen bei unnatürlichen Paritäten die 1^+ Zustände sowohl für $L = J - 1$ wie für $L = J + 1$ im Bereich von 2 MeV. Für natürliche Paritäten sind zwei 2^+ Zustände im Bereich von 4 MeV für $S = 0$ und $S = 1$ zu sehen. Der Vergleich dieser beiden Spiegelkerne, ^{12}B und ^{12}N , macht den ähnlichen Aufbau ihrer Zustände aufgrund der Isospinsymmetrie deutlich. Für die 1^+ Zustände ist eine Verschiebung von 2,5 MeV zu 4 MeV und 2 MeV von ^{12}N zu ^{12}B erkennbar. Die 2^+ Zustände verschieben sich von 4 MeV bei ^{12}N zu 2,5 MeV bei ^{12}B .

Abbildung 7.4: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität und $S = 0$.

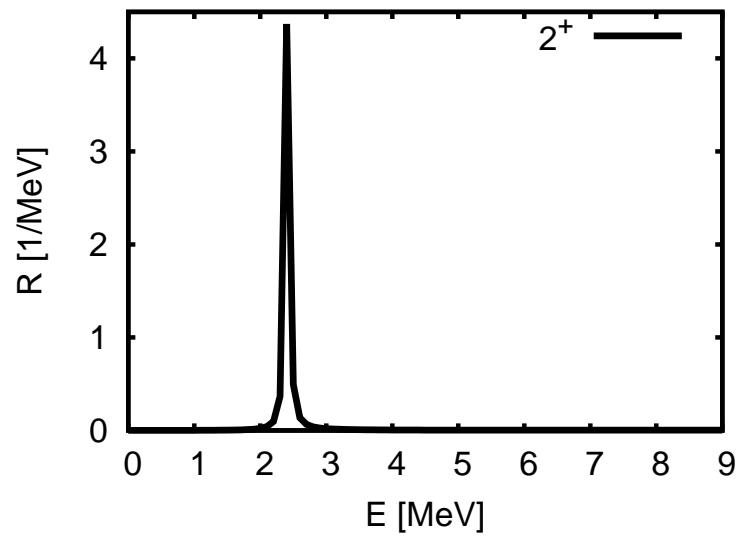


Abbildung 7.5: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität und $S = 1$.

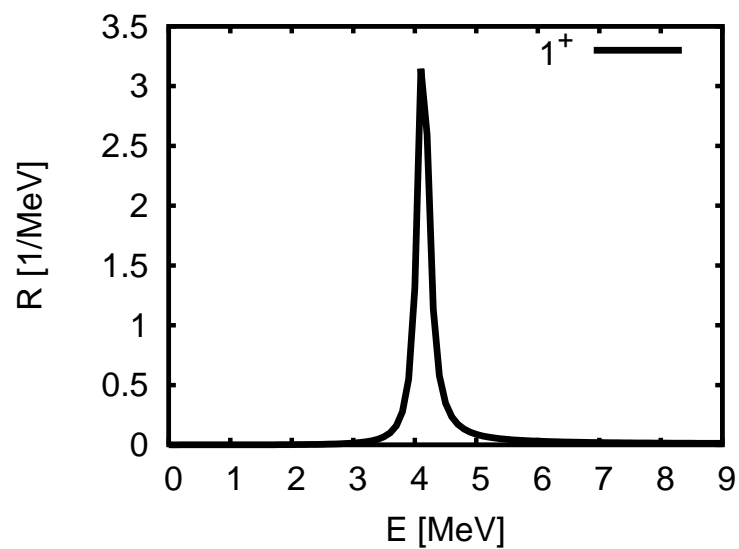


Abbildung 7.6: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität und $L = J - 1$.

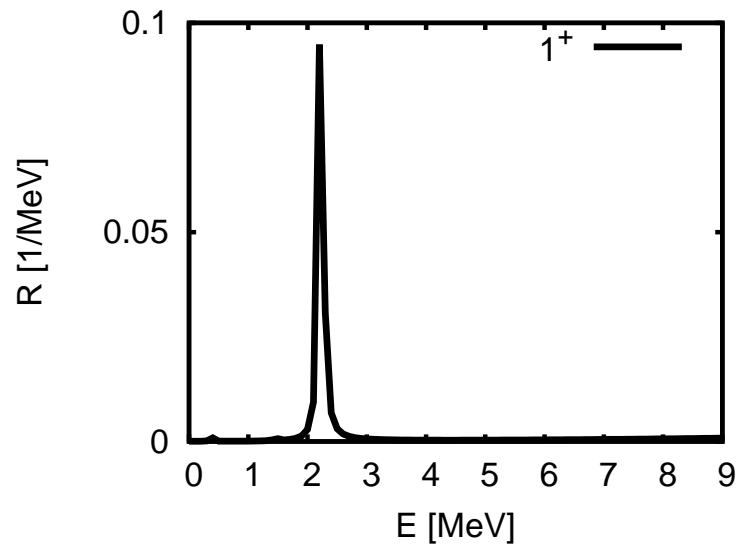


Abbildung 7.7: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität und $L = J + 1$.

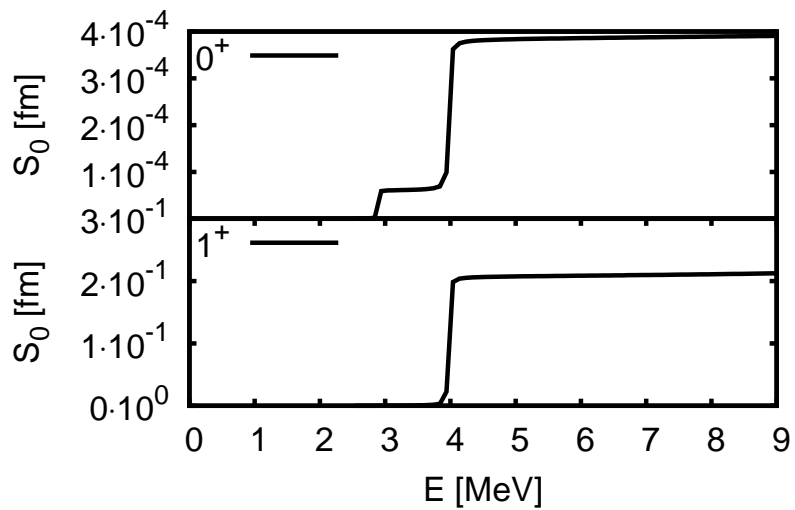


Abbildung 7.8: Kumulative Summenregel für den $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ($p \rightarrow n$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

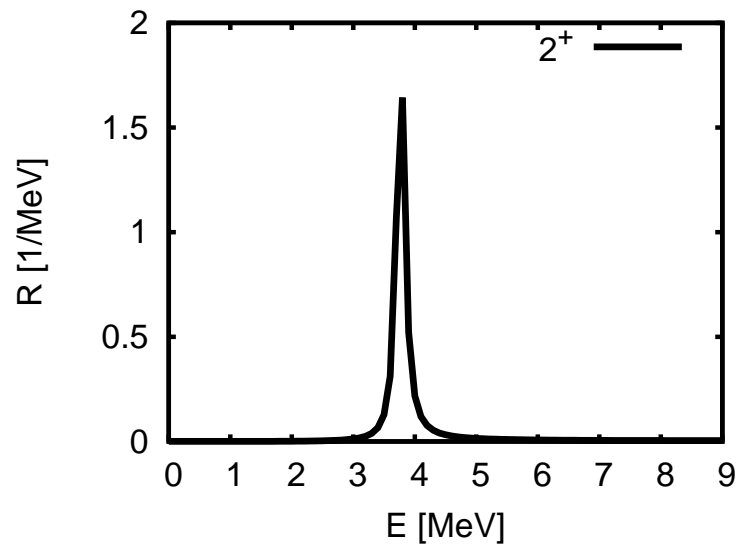


Abbildung 7.9: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N} (n \rightarrow p)$ für natürliche Parität mit $S = 0$.

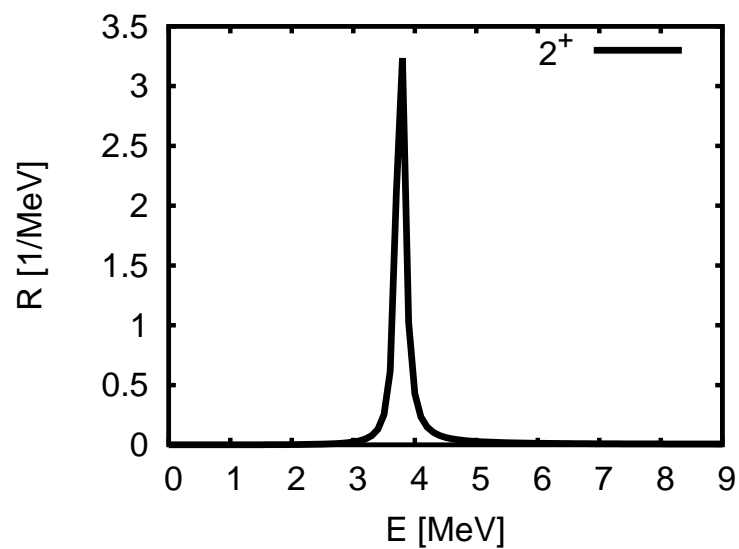


Abbildung 7.10: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N} (n \rightarrow p)$ für natürliche Parität mit $S = 1$.

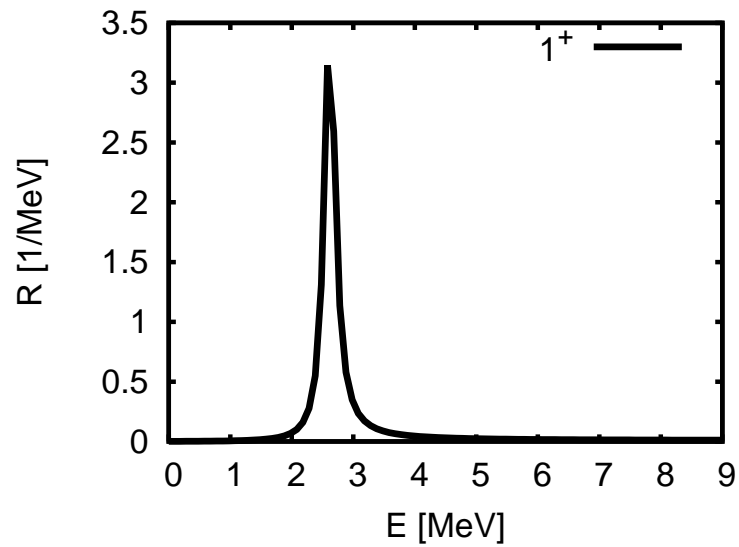


Abbildung 7.11: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$.

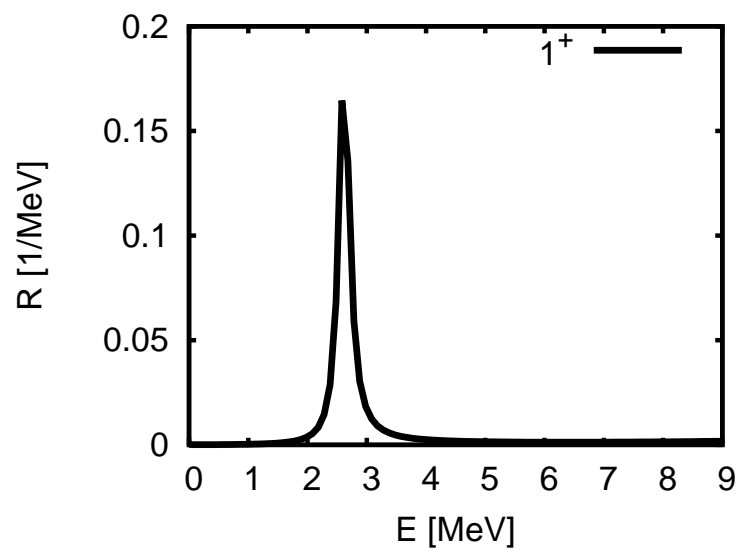


Abbildung 7.12: Antwortfunktion für $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$.

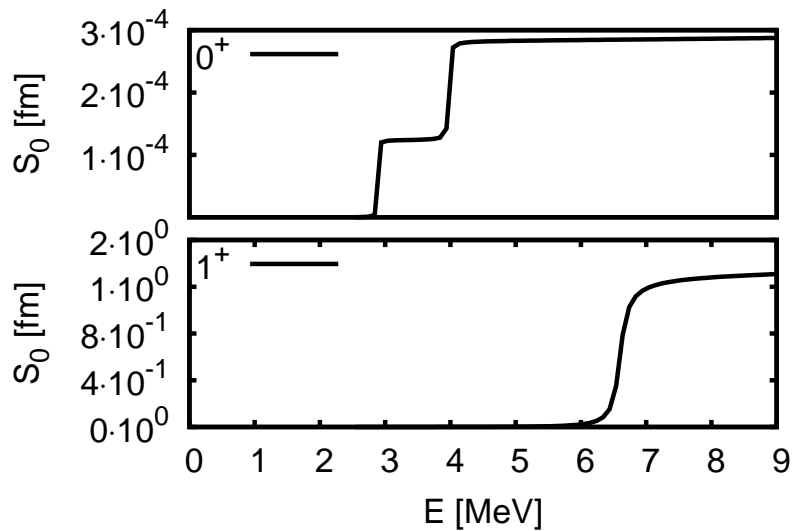


Abbildung 7.13: Kumulative Summenregel für den $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{N}$ ($n \rightarrow p$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

7.2 Magnesium: ^{24}Mg

Magnesium ^{24}Mg ist eines von drei stabilen Magnesium-Isotopen mit einer Isotopenhäufigkeit von 79%. Betrachtet man den Aufbau von ^{24}Mg , so besitzt es mit 12 Protonen und 12 Neutronen doppelt so viele wie ^{12}C . Als mögliche Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen können die beiden Spiegelkerne Natrium ^{24}Na und Aluminium ^{24}Al erreicht werden (Siehe Abbildung 7.14). Neben der Möglichkeit den Einfluss der Proton-Proton-Wechselwirkung und der Neutron-Neutron-Wechselwirkung auf die Struktur der Zustände zu untersuchen, ist es möglich die Wirkung der zusätzlichen Nukleonen, im Vergleich zu ^{12}C , zu analysieren.

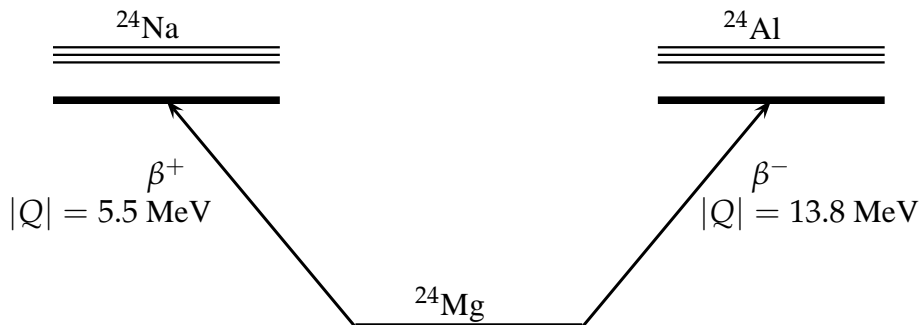


Abbildung 7.14: Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen an ^{24}Mg .

Abbildungen 7.15 bis 7.18 zeigen die Antwortfunktionen für die Reaktion $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$). Zusätzlich zu den berechneten Antwortfunktionen sind gemessene GT-Energiezustände aus [50] durch Pfeile abgebildet. Zur Angleichung der Energieskala wurde der unterste 1^+ Zustand auf 0,47 MeV gesetzt.

Abbildungen 7.20 bis 7.23 zeigen die Antwortfunktionen für den zweiten Kanal der möglichen Ladungsaustauschanregungen $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}$ ($n \rightarrow p$). Wie im vorherigen Fall, sind neben den Antwortfunktionen gemessene GT-Anregungsenergiespektren aus [41] aufgetragen. Zur Angleichung der Energieskala wurde der unterste 2^+ Zustand auf 0.514 MeV gesetzt.

Eine Gegenüberstellung der Antwortfunktionen mit denen für die Ladungsaustauschanregung an ^{12}C zeigt den Einfluss der zusätzlichen Nukleonen. Hierbei ist durch die Skalierung der Energie an den Grundzustand der experimentellen Daten nur ein Vergleich von Energiedifferenzen möglich.

Für den $p \rightarrow n$ Kanal ist dies ein Vergleich der Antwortfunktion von ^{12}B mit ^{24}Na . Für unnatürliche Paritäten findet man den 1^+ Grundzustand und den zweiten 1^+ Zustand wieder. Lediglich der Abstand zwischen den Zuständen hat sich vergrößert. Neben diesen 1^+ Zuständen tauchen nun weitere Anregungszustände auf. Es sind sowohl 0^- , 2^- sowie 3^+ Zustände beobachtbar. Im Spektrum von ^{24}N für natürliche Paritäten sind neben dem bekannte 2^+ Zustand aus ^{12}B drei weitere 2^+ Zustände sichtbar. Wie im Falle der unnatürlichen Parität sind weitere Zustände beobachtbar. Für den $n \rightarrow p$ Kanal ist dies ein Vergleich der Antwortfunktion von ^{12}N mit ^{24}Al , hier sind, ähnlich dem $p \rightarrow n$ Kanal, neben den bekannten 1^+ und 2^+ Zuständen aus ^{12}N zusätzliche Zustände durch die hinzugekommenen Nukleonen beobachtbar.

Die Gegenüberstellung der beiden Spiegelkerne, ^{24}Na und ^{24}Al , macht wie bei im Falle ^{12}B mit ^{12}N , den ähnlichen Aufbau ihrer Zustände aufgrund der Isospinsymmetrie deutlich. Für natürliche Paritäten liegen sowohl der 1^- , der 2^+ sowie auch der 3^- Zustand im gleichen Energiebereich. Für unnatürliche Paritäten ist eine entsprechende Übereinstimmung der Zustände sichtbar.

Die experimentellen Daten für GT-Energiezustände bestätigen die theoretisch berechneten Zustände aus den Antwortfunktionen.

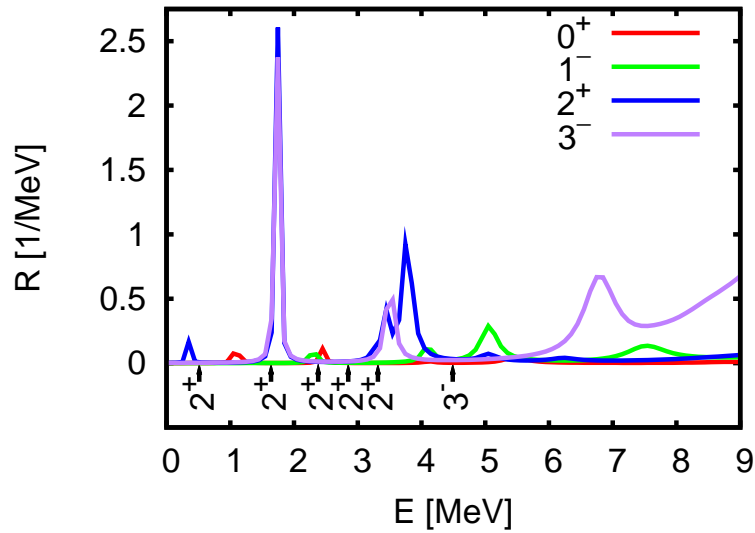


Abbildung 7.15: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 0$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

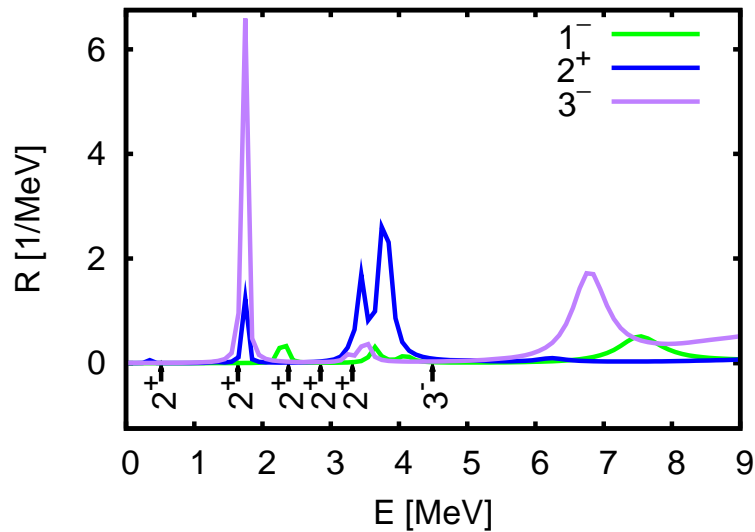


Abbildung 7.16: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

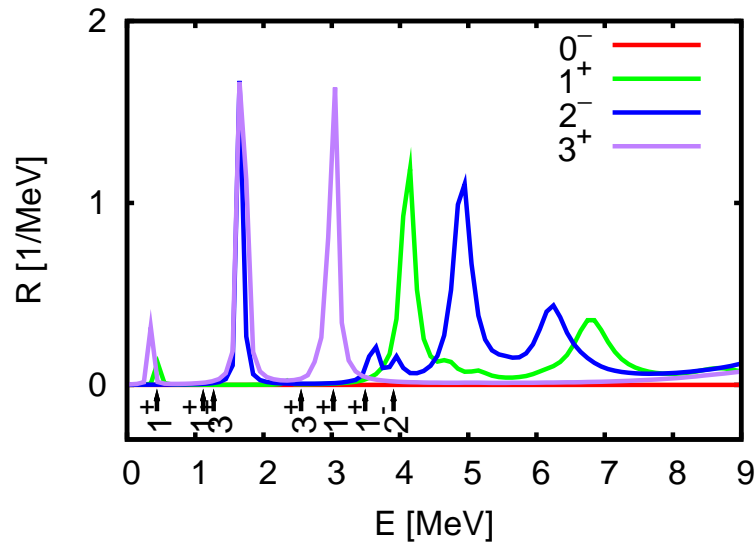


Abbildung 7.17: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

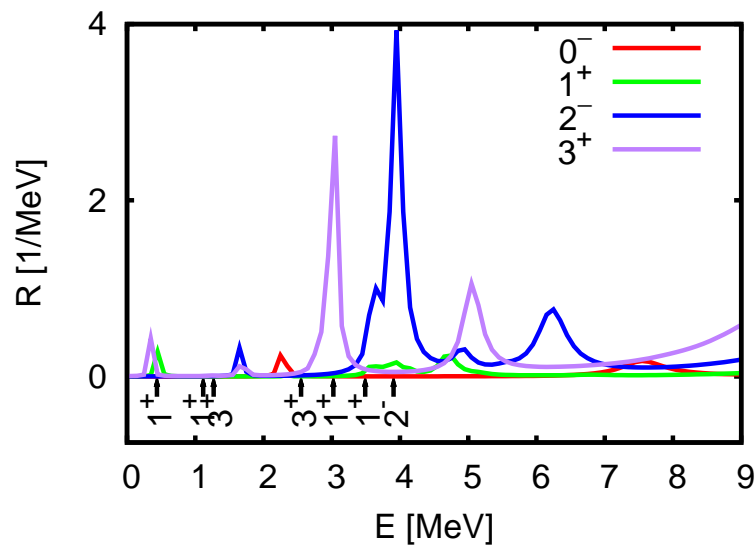


Abbildung 7.18: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

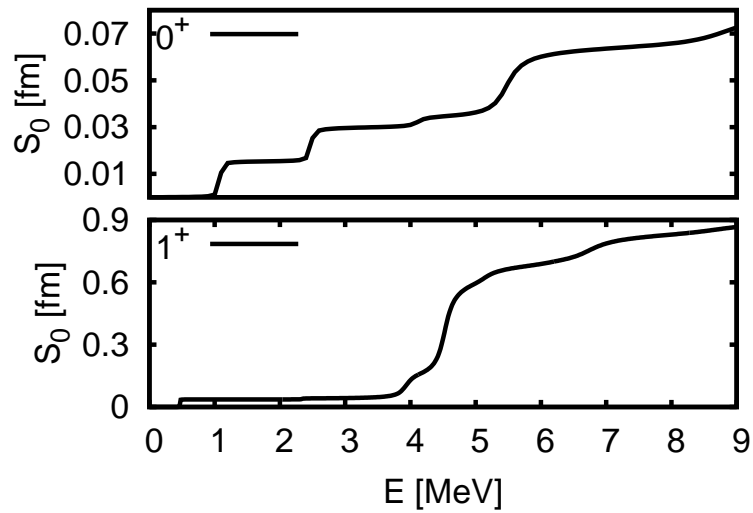


Abbildung 7.19: Kumulative Summenregel für den $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$ ($p \rightarrow n$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

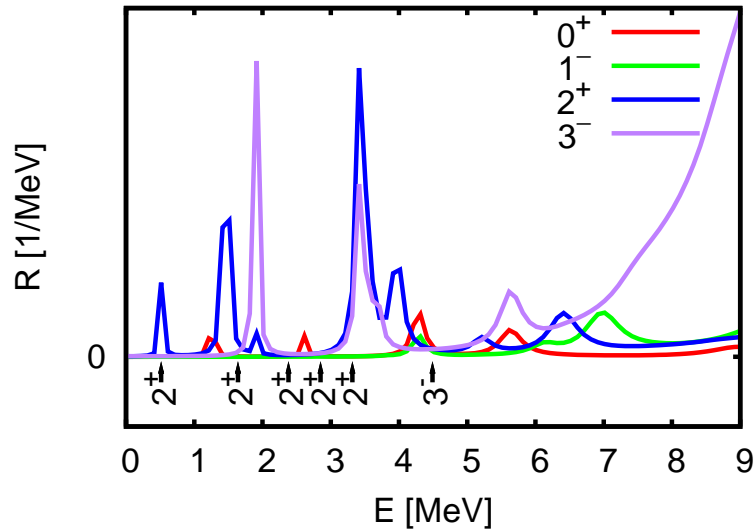


Abbildung 7.20: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 0$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [41] ist mit Pfeilen markiert.

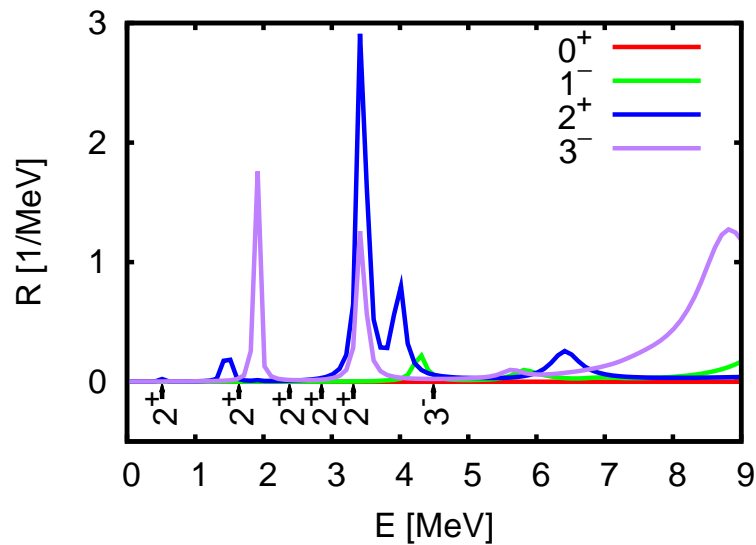


Abbildung 7.21: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [41] ist mit Pfeilen markiert.

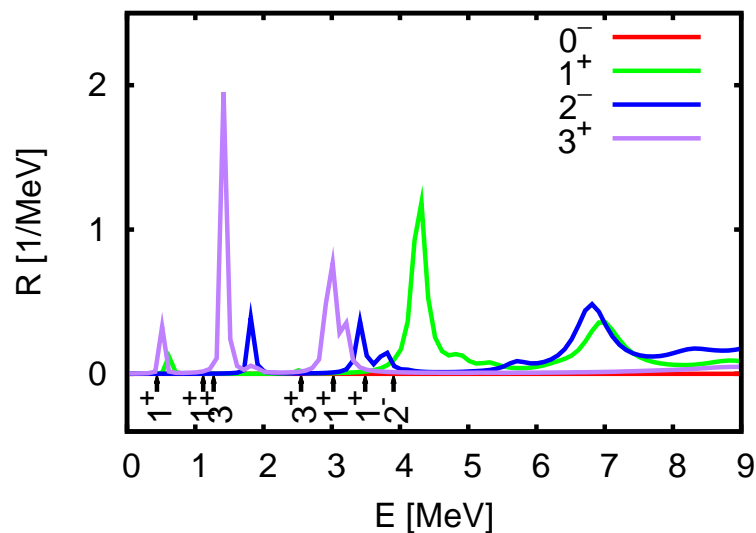


Abbildung 7.22: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [41] ist mit Pfeilen markiert.

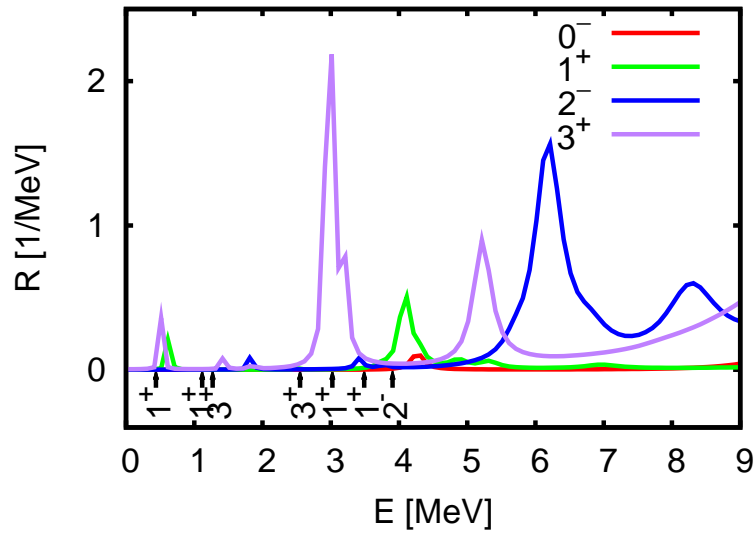


Abbildung 7.23: Antwortfunktion für $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}(n \rightarrow p)$ für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [41] ist mit Pfeilen markiert.

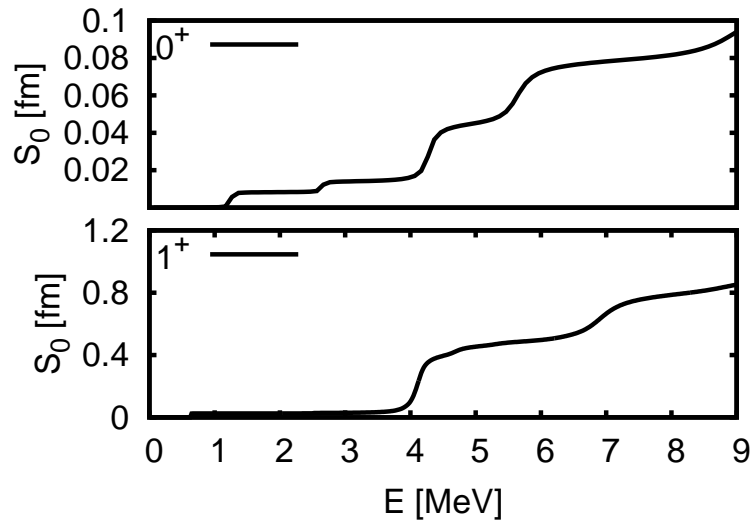


Abbildung 7.24: Kumulative Summenregel für den $^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Al}(n \rightarrow p)$ Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

7.3 Schwefel: ^{32}S

Mit Schwefel ^{32}S wird ein weiterer gerade-gerade Kern untersucht. Das am häufigsten vorkommende von vier stabilen Schwefel-Isotopen, mit einer Isotopenhäufigkeit von 95,02%, ist aus 16 Protonen und 16 Neutronen aufgebaut. Abbildung 7.25 zeigt die Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen, die beiden Spiegelkerne Phosphor ^{32}P und Chlor ^{32}Cl .

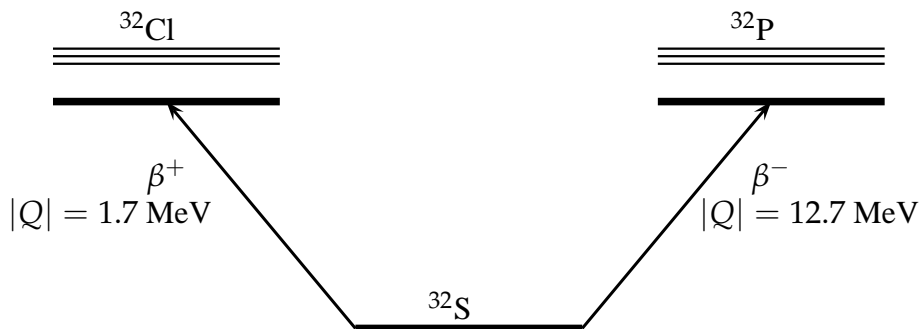


Abbildung 7.25: Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen an ^{24}Mg .

Abbildung 7.26 bis 7.29 zeigen die Antwortfunktionen für die Reaktion $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$). Zusätzlich zu den berechneten Antwortfunktionen sind gemessene GT-Energiezustände aus [31] durch Pfeile abgebildet. Zur Angleichung der Energieskala wurde der unterste 1^+ Zustand als Grundzustand auf 0 MeV gesetzt. Abbildung 7.31 bis 7.34 zeigen die Antwortfunktionen für die Reaktion $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl}$ ($n \rightarrow p$). Die beiden Spiegelkerne ^{32}P und ^{32}Cl bieten eine weitere Möglichkeit die Struktur der Zustände und die Isospinsymmetrie zu untersuchen. Vergleicht man die Antwortfunktionen für natürliche Paritäten so liegen sowohl bei ^{32}P als auch bei ^{32}Cl zwei 2^+ Zustände im Bereich von 0 MeV und 4 MeV. Zusätzlich zu dieser Übereinstimmung weist ^{32}P einen weiteren 2^+ Zustand um 1 MeV auf und ^{32}Cl besitzt einen 0^+ Zustand um 1,5 MeV, welcher im ^{32}P nicht auftaucht. Ein Vergleich der Antwortfunktion für unnatürliche Paritäten zeigt auch hier eine Ähnliche Struktur für die 1^+ Zustände. Die 3^+ Zustände weisen hier aber keine ähnliche Struktur auf, sie liegen bei beiden Kernen in unterschiedlichen Energiebereichen und auch ihre Abstände ähneln sich nicht. Für die Antwortfunktion des ($p \rightarrow n$) Kanals ist ein Vergleich mit experimentellen Daten möglich. Für die natürlichen Paritäten werden die die ersten beiden 2^+ Zustände sehr gut beschrieben, der dritte 2^+ Zustand hingegen wird durch die Rechnung nicht beobachtet. Zwar finden sich in den gemessenen Daten, für die unnatürliche Parität, die 1^+ Zustände der berechneten Antwortfunktionen wieder, aber nicht alle gemessenen GT-Energiezustände werden durch die Antwortfunktionen für $L = J + 1$ und $L = J - 1$ beschrieben.

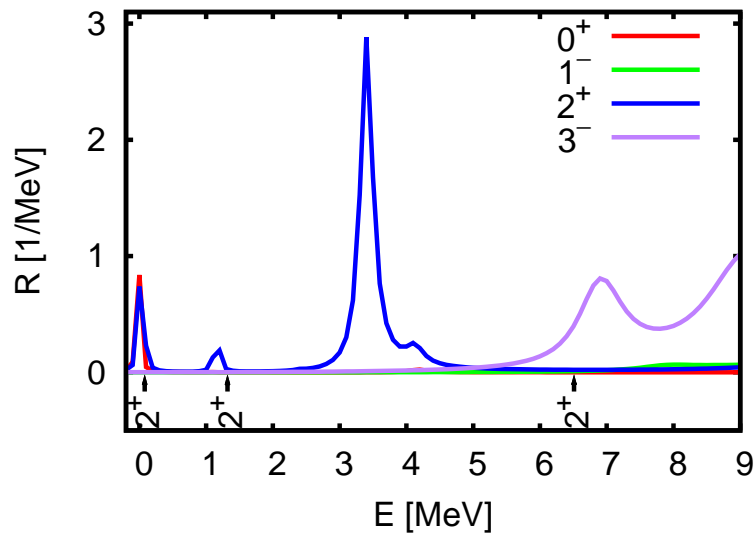


Abbildung 7.26: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 0$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [31] ist mit Pfeilen markiert.

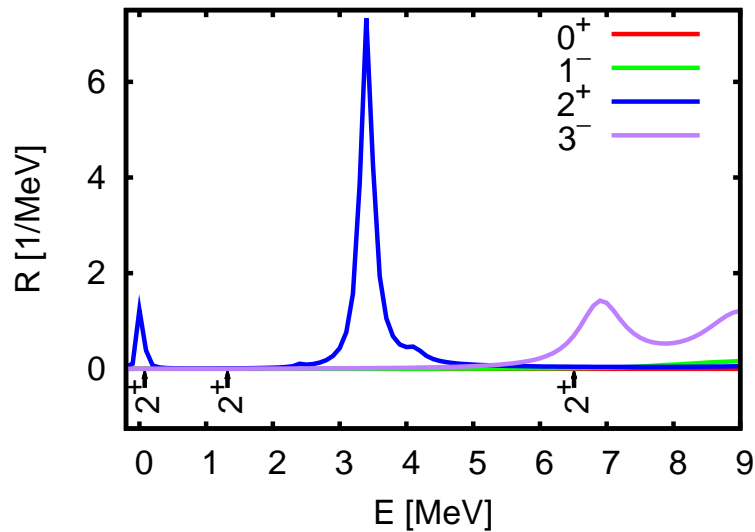


Abbildung 7.27: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [31] ist mit Pfeilen markiert.

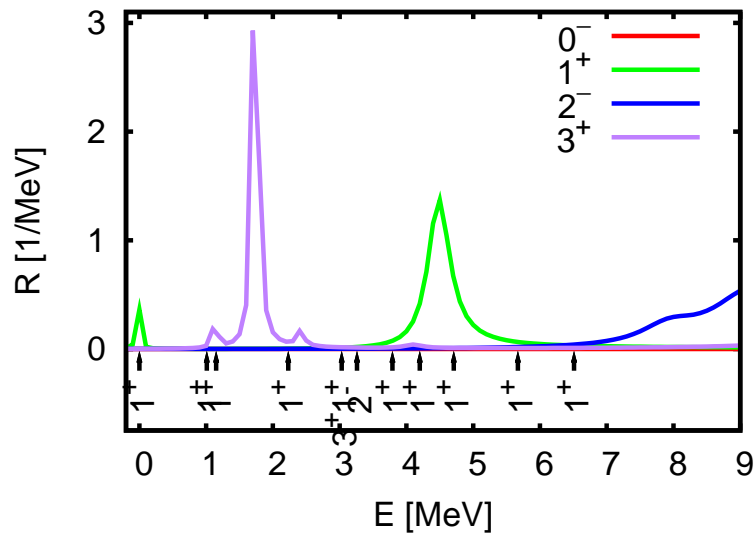


Abbildung 7.28: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [31] ist mit Pfeilen markiert.

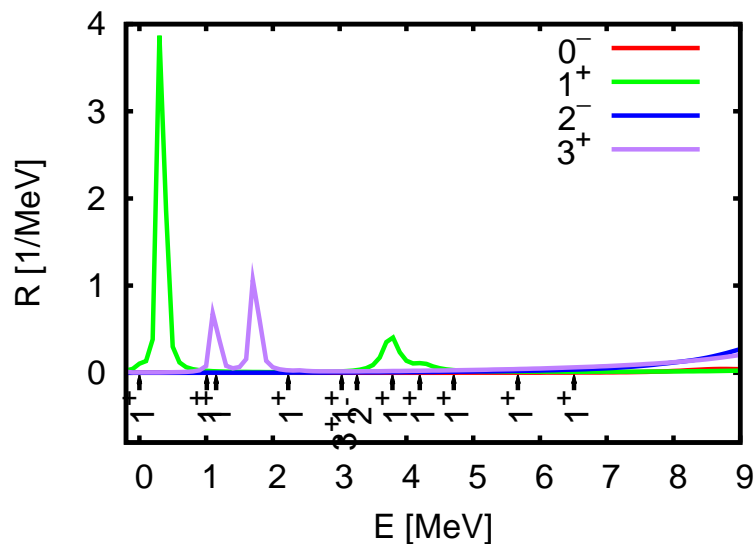


Abbildung 7.29: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [31] ist mit Pfeilen markiert.

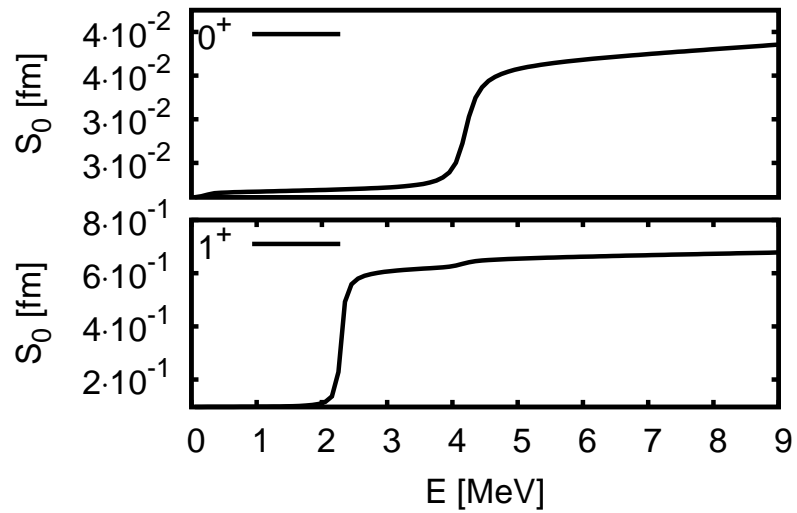


Abbildung 7.30: Kumulative Summenregel für den $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$ ($p \rightarrow n$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

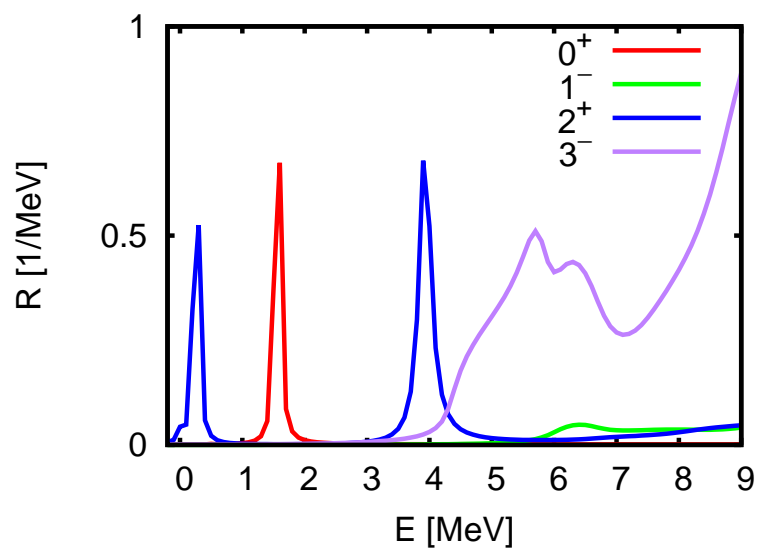


Abbildung 7.31: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 0$.

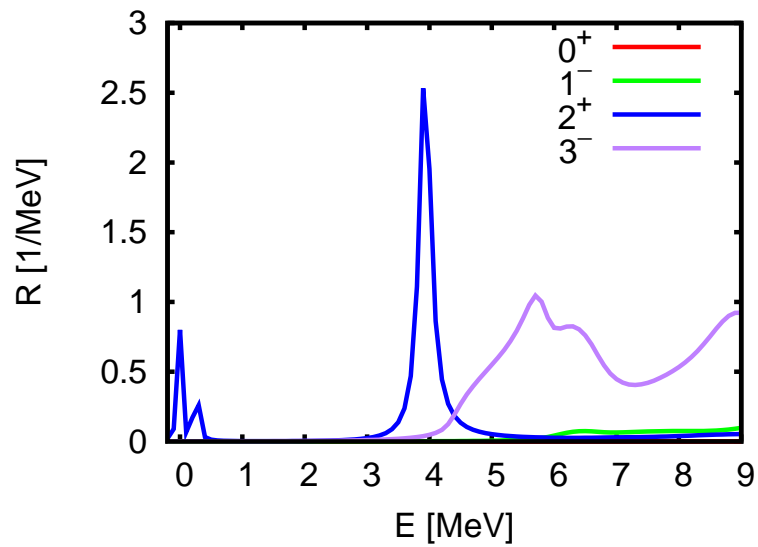


Abbildung 7.32: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 1$.

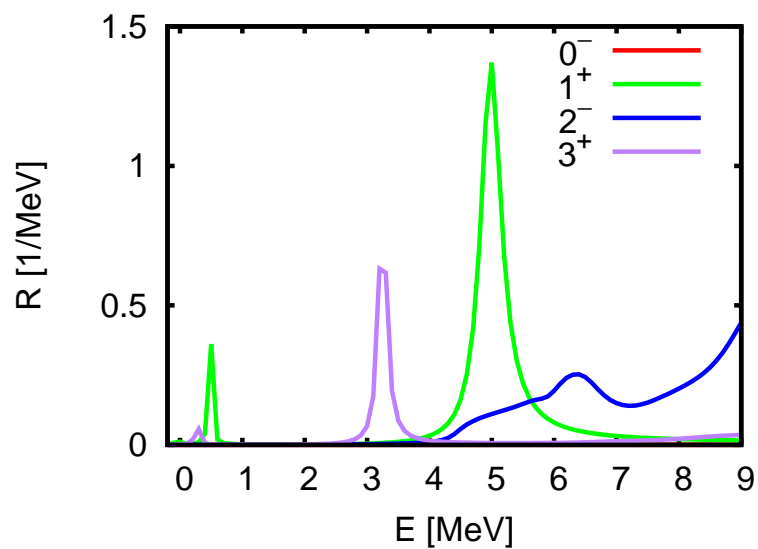


Abbildung 7.33: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$.

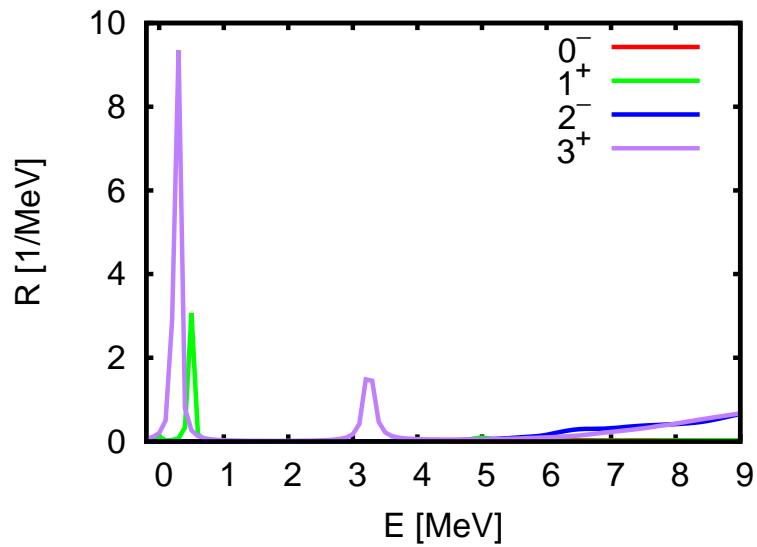


Abbildung 7.34: Antwortfunktion für $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl} (n \rightarrow p)$ für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$.

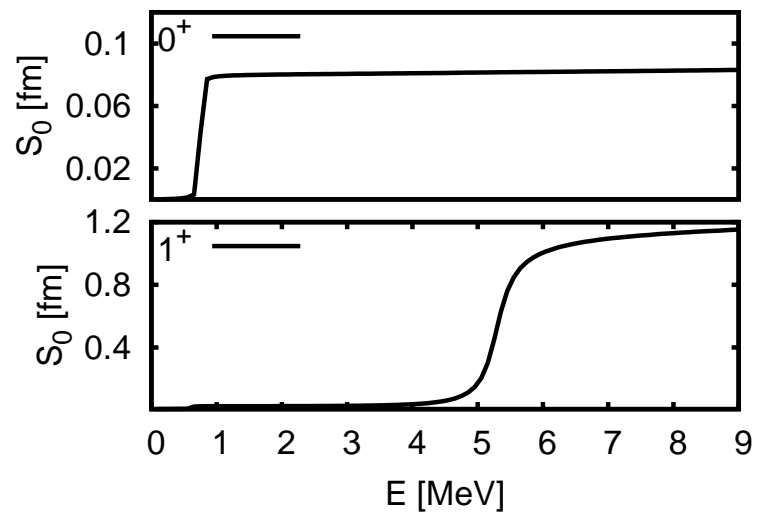


Abbildung 7.35: Kumulative Summenregel für den $^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{Cl} (n \rightarrow p)$ Fermi- und Gamow-Teller-Übergang

7.4 Eisen: ^{56}Fe

Eisen ^{56}Fe , bestehend aus 26 Protonen und 30 Neutronen, ist eins von vier natürlich vorkommenden, stabilen Isotopen, mit einer Isotopenhäufigkeit von 91,7%. Es besitzt den größten Massendefekte und somit die höchsten Bindungsenergien aller Atomkerne und bildet das Kurvenmaximum der Kernbindungsenergiekurve. Aufgrund dieser Eigenschaft bildet es den Abschluss der Kernfusionskette in den Sternen und ist nicht nur für den Bereich der Kernstruktur interessant sondern findet auch Anwendung in astrophysikalischen Untersuchungen. Mit den beiden Ladungsaustauschanregungskanälen Mangan ^{56}Mn für den $p \rightarrow n$ Prozess sowie Kobalt ^{56}Co für den $n \rightarrow p$ Prozess (siehe Abbildung 7.36) bietet sich im Vergleich zu den vorherigen Spiegelkernen eine Untersuchung der Zustände unter der Berücksichtigung der Proton-Neutron-Wechselwirkung, welche keine Rolle bei der Betrachtung von Spiegelkernen spielt.

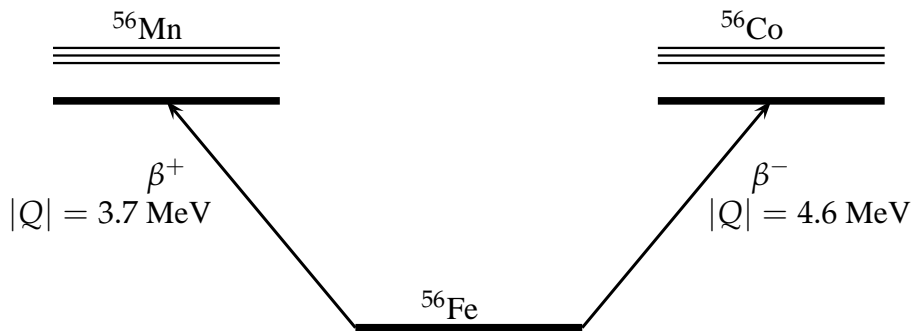


Abbildung 7.36: Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen an ^{56}Fe .

Abbildungen 7.37 bis 7.39 zeigen die Antwortfunktionen für die Reaktion $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) und gemessene Daten für GT-Energiezustände aus [50]. Der unterste 3^+ Zustand ist als Grundzustand auf 0 MeV gesetzt, um die Energieskala anzugleichen. Abbildungen 7.42 bis 7.44 zeigen die Antwortfunktionen für den zweiten Reaktionskanal $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) und ebenfalls gemessene Daten für GT-Energiezustände aus [59]. Hierbei ist der unterste 3^+ auf 0.158 MeV gesetzt, um die Energieskala anzugleichen. Ein Vergleich der Antwortfunktion für natürliche sowie unnatürliche Paritäten zeigt keine systematische Übereinstimmung der jeweiligen Zustände. Man beobachtet, dass durch die Proton-Neutron-Wechselwirkung die Symmetrie der vorherigen Untersuchungen von Spiegelkernfall verloren geht.

Der Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt, dass für den ($p \rightarrow n$) die Antwortfunktionen der natürlichen Parität die Regionen der gefundenen 2^+ GT-Energiezustände sehr genau beschreibt. Bei den unnatürlichen Paritäten ist die Übereinstimmung mit Daten nur auf einen Teil der gemessenen 1^+ und 3^+ Zu-

stände beschränkt.

Für den ($n \rightarrow p$) Kanal zeigt die Antwortfunktionen der natürlichen Parität die Regionen der gefundenen 2^+ GT-Energiezustände sehr genau. Der zweite gemessene 0^+ Zustand wird von der Antwortfunktion ebenfalls bestätigt, wohingegen der erste 0^+ -Zustand nicht auftritt. Ebenfalls ist bei den unnatürlichen Paritäten eine Übereinstimmung mit gemessenen Daten für die 1^+ und 3^+ Zustände beobachtbar.

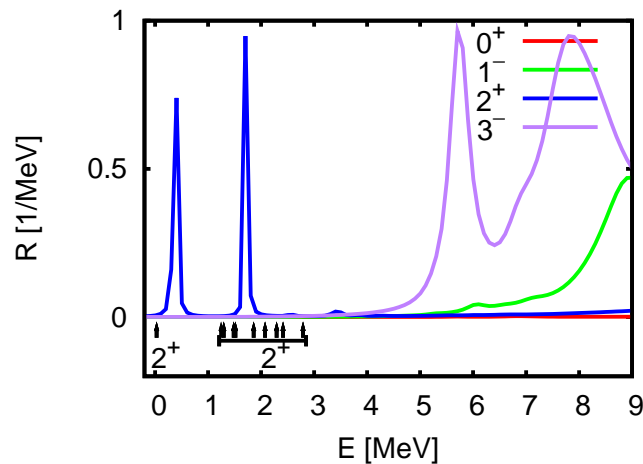


Abbildung 7.37: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 0$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

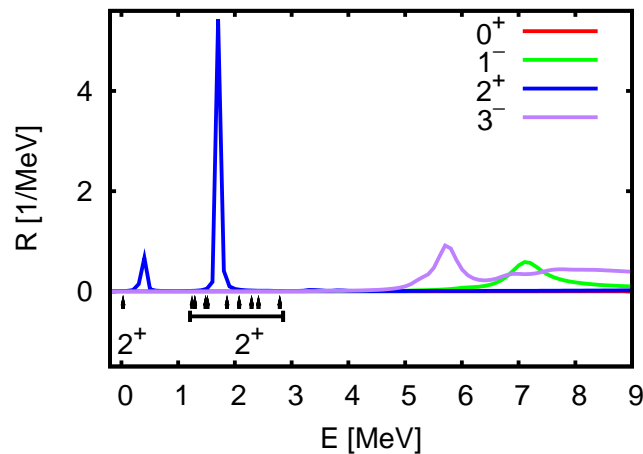


Abbildung 7.38: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

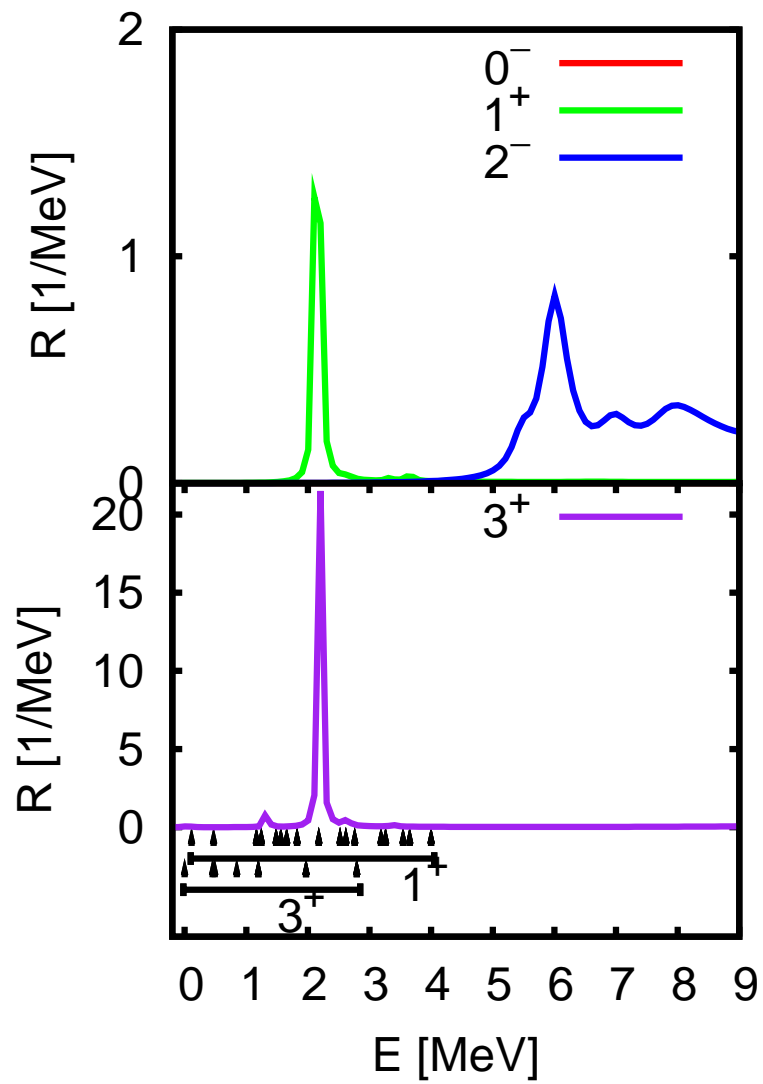


Abbildung 7.39: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

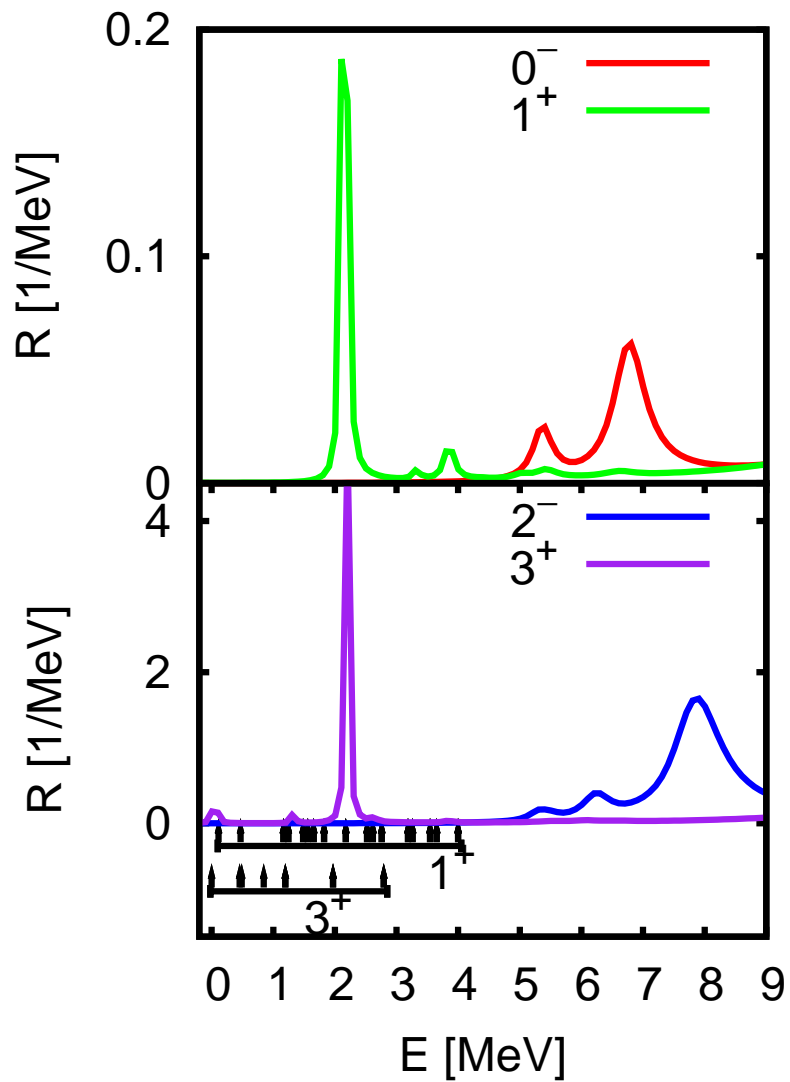


Abbildung 7.40: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [50] ist mit Pfeilen markiert.

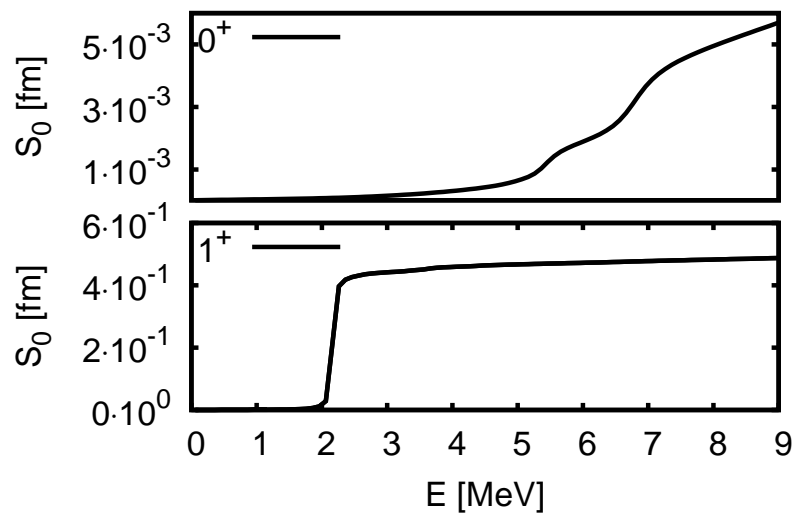


Abbildung 7.41: Kumulative Summenregel für den $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

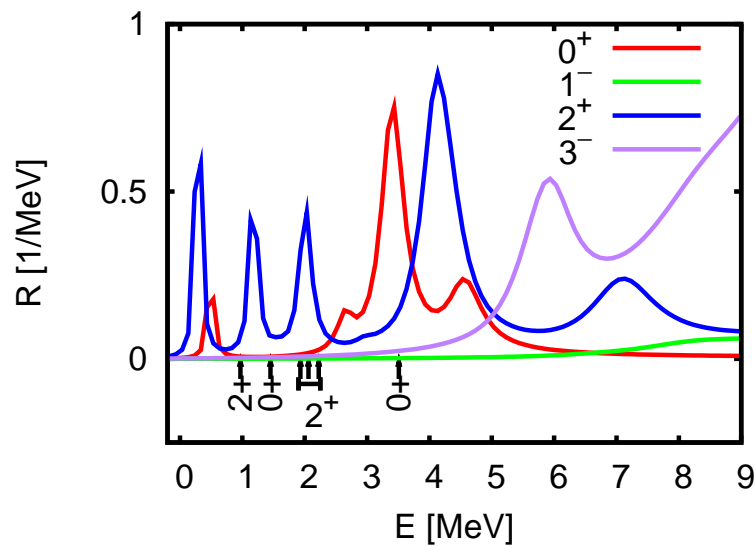


Abbildung 7.42: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 0$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [59] ist mit Pfeilen markiert.

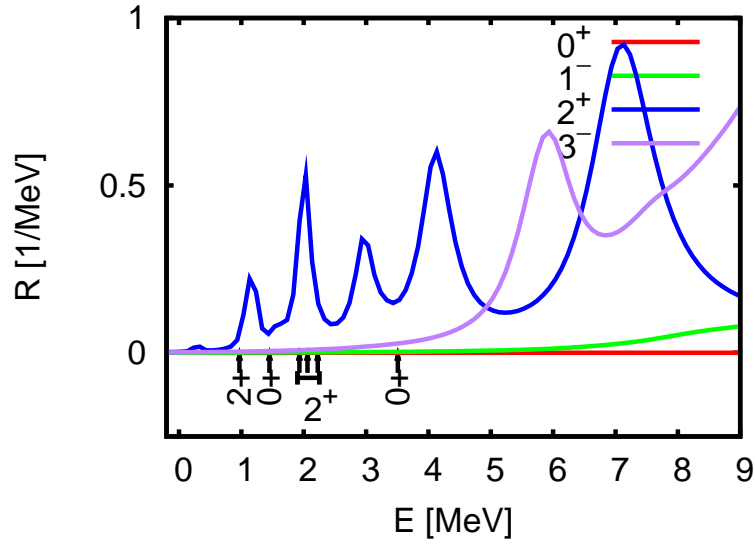


Abbildung 7.43: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co} (n \rightarrow p)$ für natürliche Parität mit $S = 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [59] ist mit Pfeilen markiert.

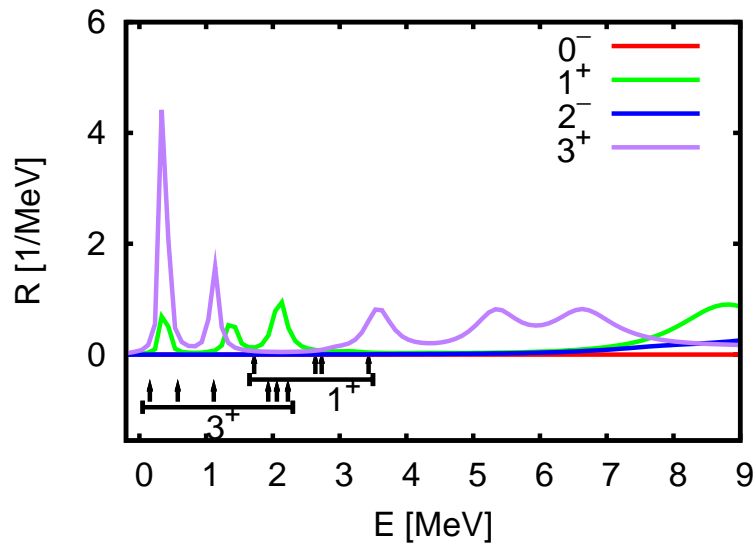


Abbildung 7.44: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co} (n \rightarrow p)$ für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [59] ist mit Pfeilen markiert.

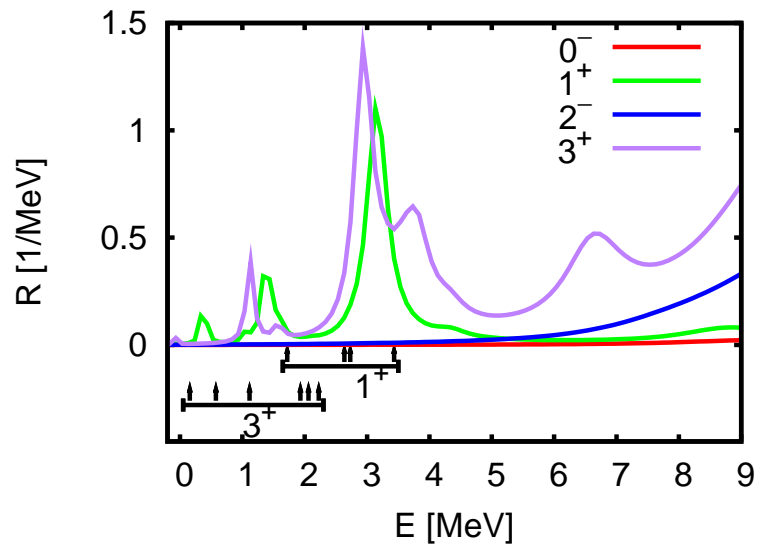


Abbildung 7.45: Antwortfunktion für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$. Die Lage von experimentell bekannten Zuständen aus [59] ist mit Pfeilen markiert.

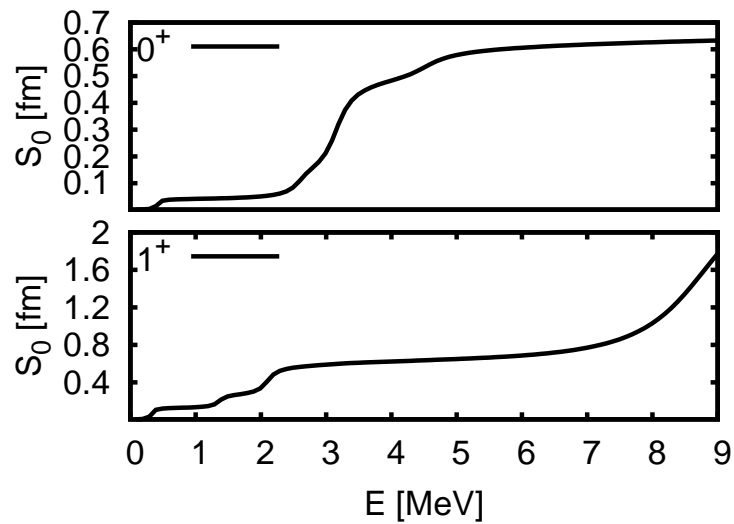


Abbildung 7.46: Kumulative Summenregel für den $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) Fermi- und Gamow-Teller-Übergang.

7.5 Nickel Isotopenkette

In diesem Abschnitt werden die Rechnungen der vorherigen Untersuchungen erweitert und es werden Antwortfunktionen für mehrere Nukleonen einer Isotopenkette am Beispiel von Nickel vorgestellt. Nickel besitzt 28 Protonen und deckt einen Neutronenbereich von 20 im leichtesten Vertreter ^{48}Ni bis zu 50 im ^{78}Ni . Betrachtet man die Nuklidkarte genauer, so bündeln sich in der Nickel-Isotopenkette Kerne mit physikalisch interessanten Eigenschaften. Entlang der Isotopenkette sind neben den fünf stabilen Isotopen ^{58}Ni , ^{60}Ni , ^{61}Ni , ^{62}Ni und ^{64}Ni auch drei doppelt magische Isotope ^{48}Ni , ^{56}Ni und ^{78}Ni zu finden, was einmalig für die gesamte Nuklidkarte ist. Die berechneten Antwortfunktionen zeigen einen Schnitt durch diese Isotopenkette mit den Vertretern ^{48}Ni , ^{56}Ni , ^{58}Ni , ^{64}Ni , ^{68}Ni und ^{78}Ni .

Diese Kerne sind nicht nur für Kernstrukturuntersuchungen interessant, sondern finden neben der Astrophysik auch im medizinischen Bereich Anwendung. So wird beispielsweise ^{64}Ni zur Erzeugung von ^{64}Cu gebraucht, welches in der Radioimmuntherapie Anwendung findet. Aus astrophysikalischer Sicht sind ^{56}Ni und ^{78}Ni interessant. ^{56}Ni wird in sogenannten Typ Ia Supernova-Explosionen gebildet und ist für die Form der Beleuchtung verantwortlich, welche durch die Zerfallskette von ^{56}Ni über ^{56}Co nach ^{56}Fe entsteht. ^{78}Ni , das schwerste Isotop der Kette, spielt in Nukleosynthese von schwereren Elementen als Eisen in Supernova eine wichtige Rolle.

Als neutronenärmste Nickel Isotop ist ^{48}Ni , das erst 1999 entdeckt worden ist, mit 28 Protonen und 20 Neutronen doppelt magisch und somit ungewöhnlich stabil. Mit ^{58}Ni erhält man das stabile Isotop der Kette mit einem Aufkommen von 68%.

Als mögliche Ladungsaustauschanregungskanäle für Ni können neben Kobalt Co für den $p \rightarrow n$ Prozess noch Kupfer Cu für den $n \rightarrow p$ Prozess erreicht werden (siehe Abbildung 7.47).

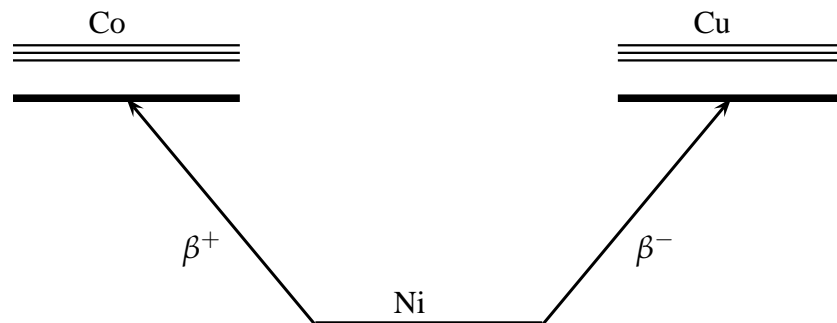


Abbildung 7.47: Anregungskanäle für Ladungsaustauschanregungen an Ni.

Abbildungen 7.48 bis 7.51 zeigen die Entwicklung der Energiezustände in Kupfer im $n \rightarrow p$ Prozess durch Anregung aus Nickel. Abbildungen 7.52 bis 7.55 zeigen die entsprechende Entwicklung der Energiezustände im $p \rightarrow n$ Prozess für Kobalt. Die Spektren für ^{48}Ni , ^{56}Ni und ^{78}Ni zeigen die Entwicklung der Zustände für Kerne mit Protonen und Neutronen nahe von Schalenabschlüssen. Die Antwortfunktionen für ^{58}Ni und ^{64}Ni zeigen jeweils das Spektrum der entsprechenden β -Zerfallenden Isotope von Co und Cu.

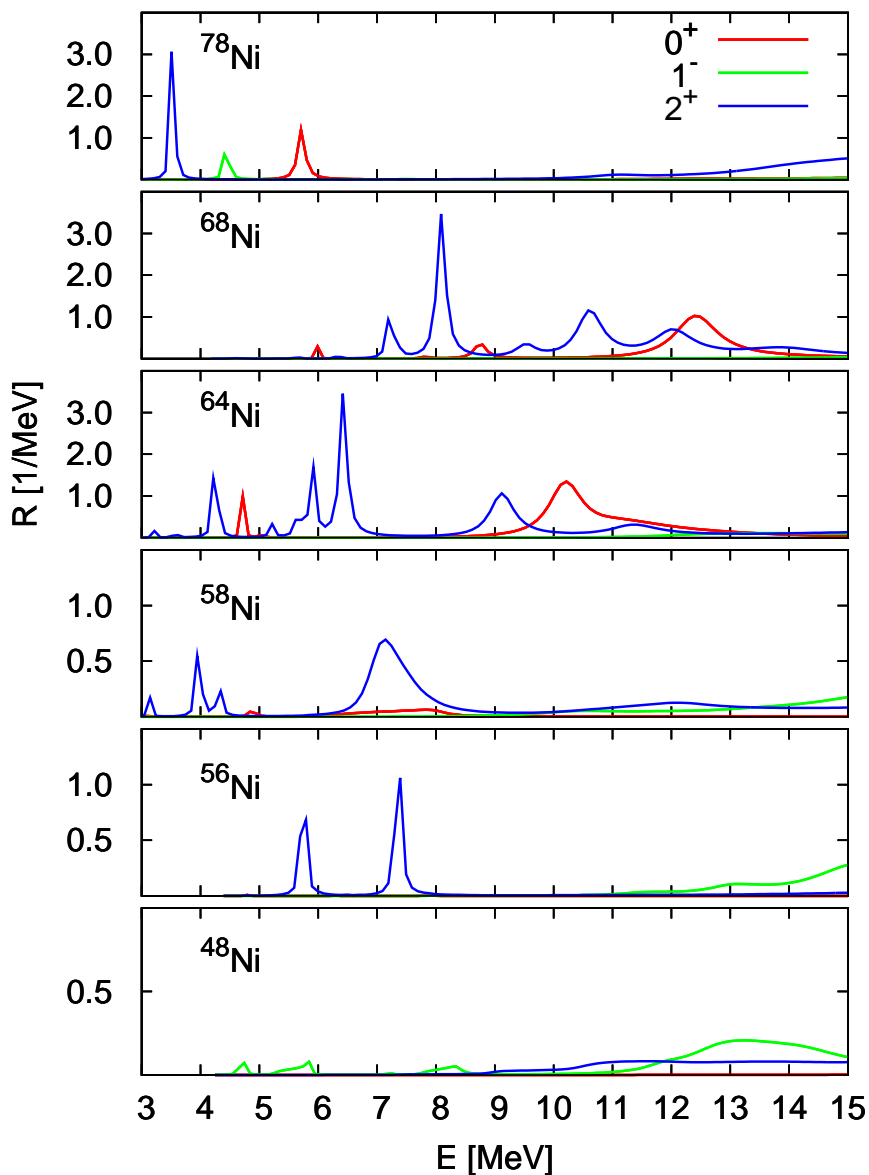


Abbildung 7.48: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Cu}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 0$.

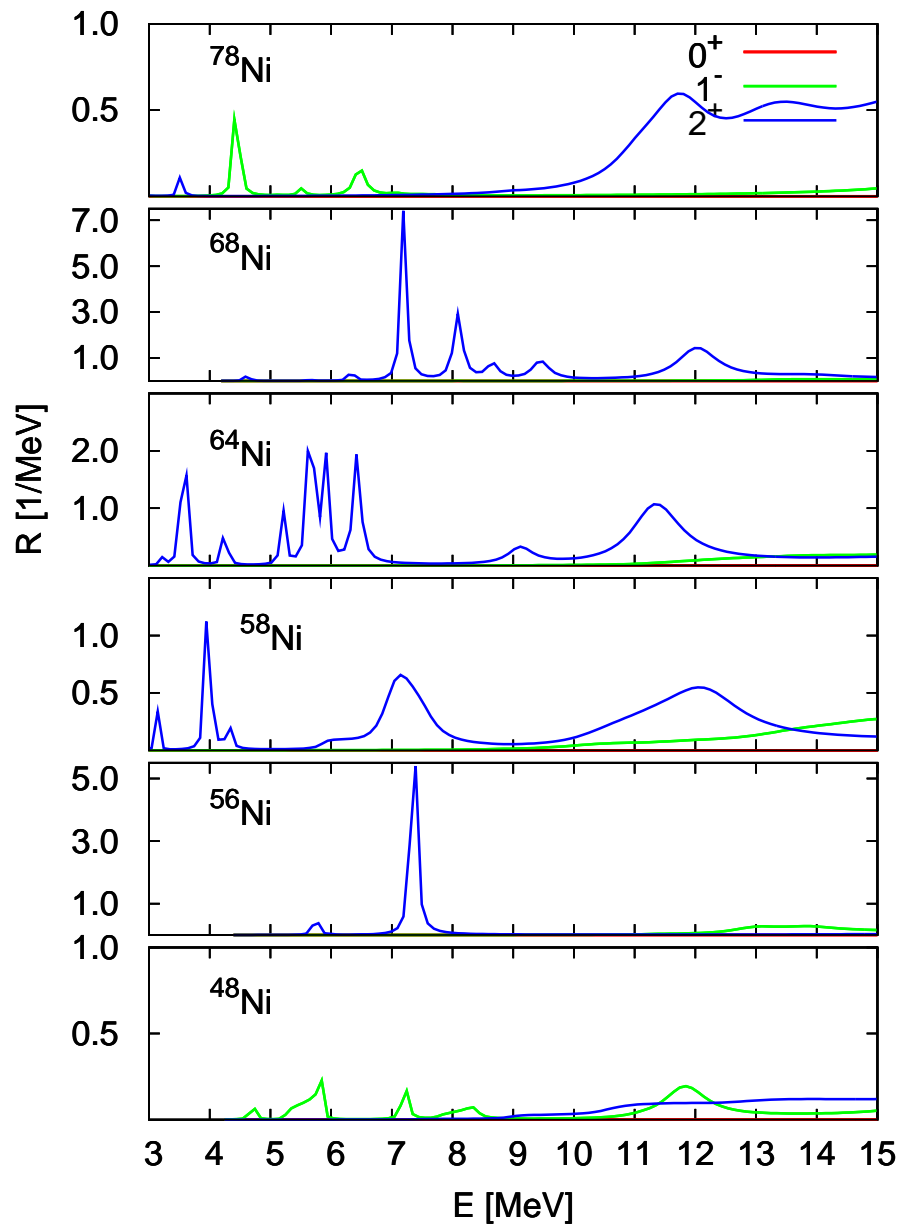


Abbildung 7.49: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Cu}$ ($n \rightarrow p$) für natürliche Parität mit $S = 1$.

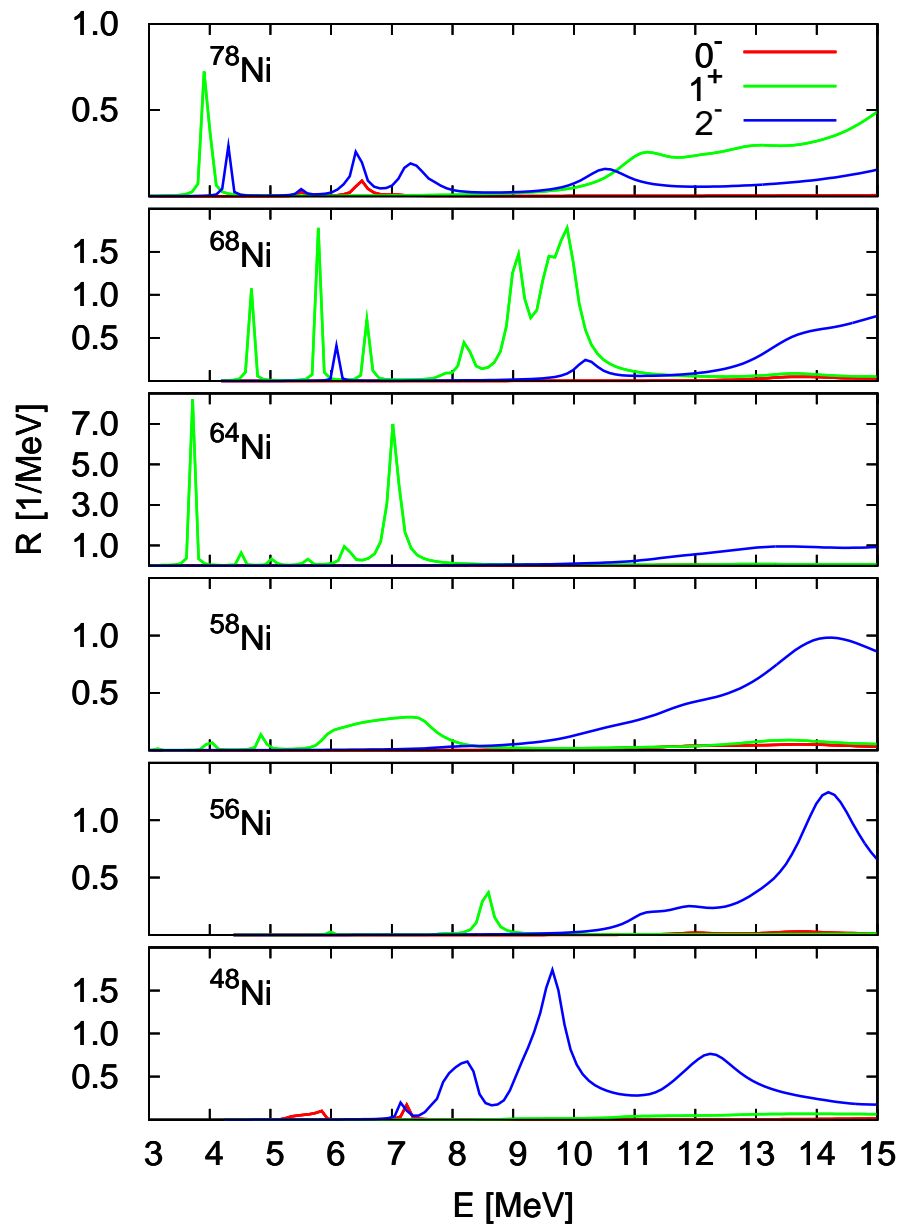


Abbildung 7.50: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Cu}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$.

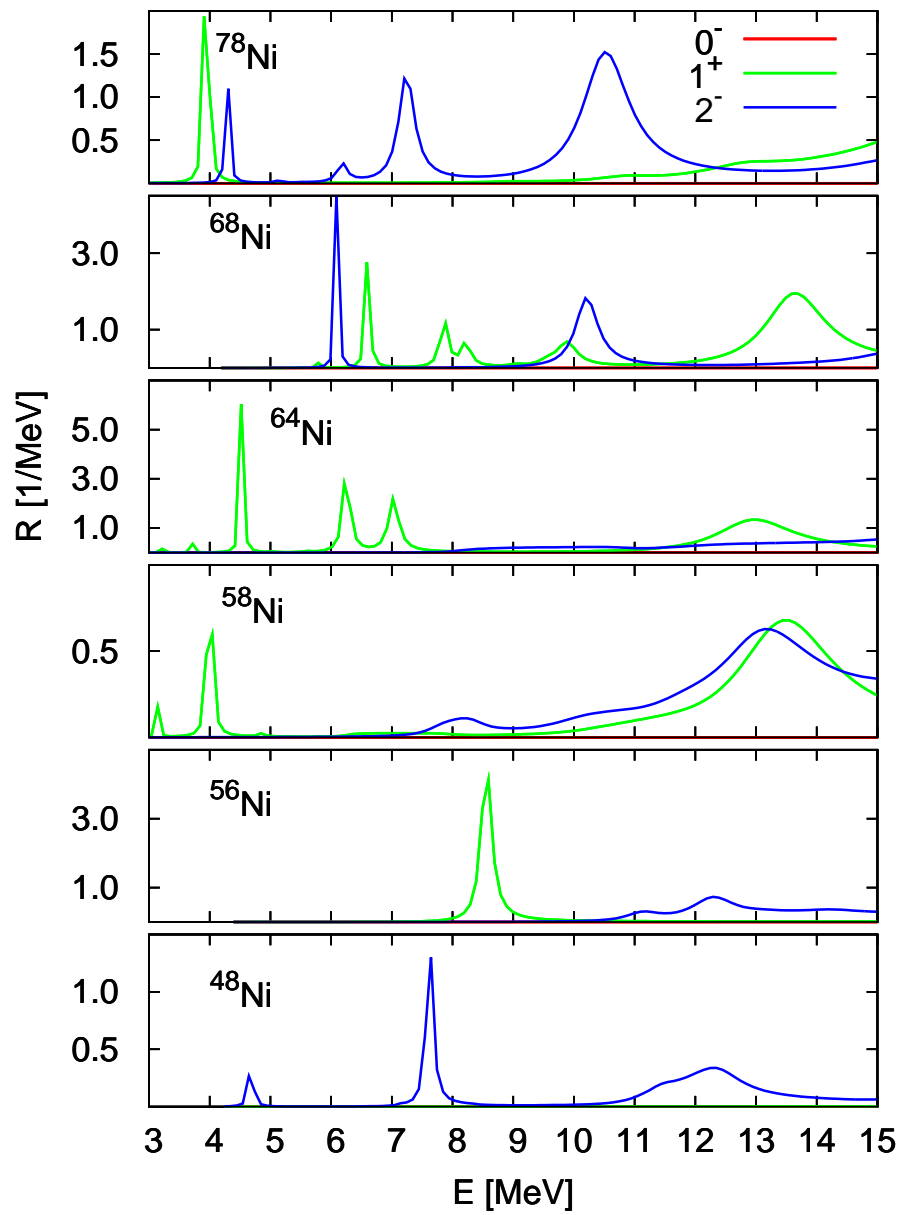


Abbildung 7.51: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Cu}$ ($n \rightarrow p$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$.

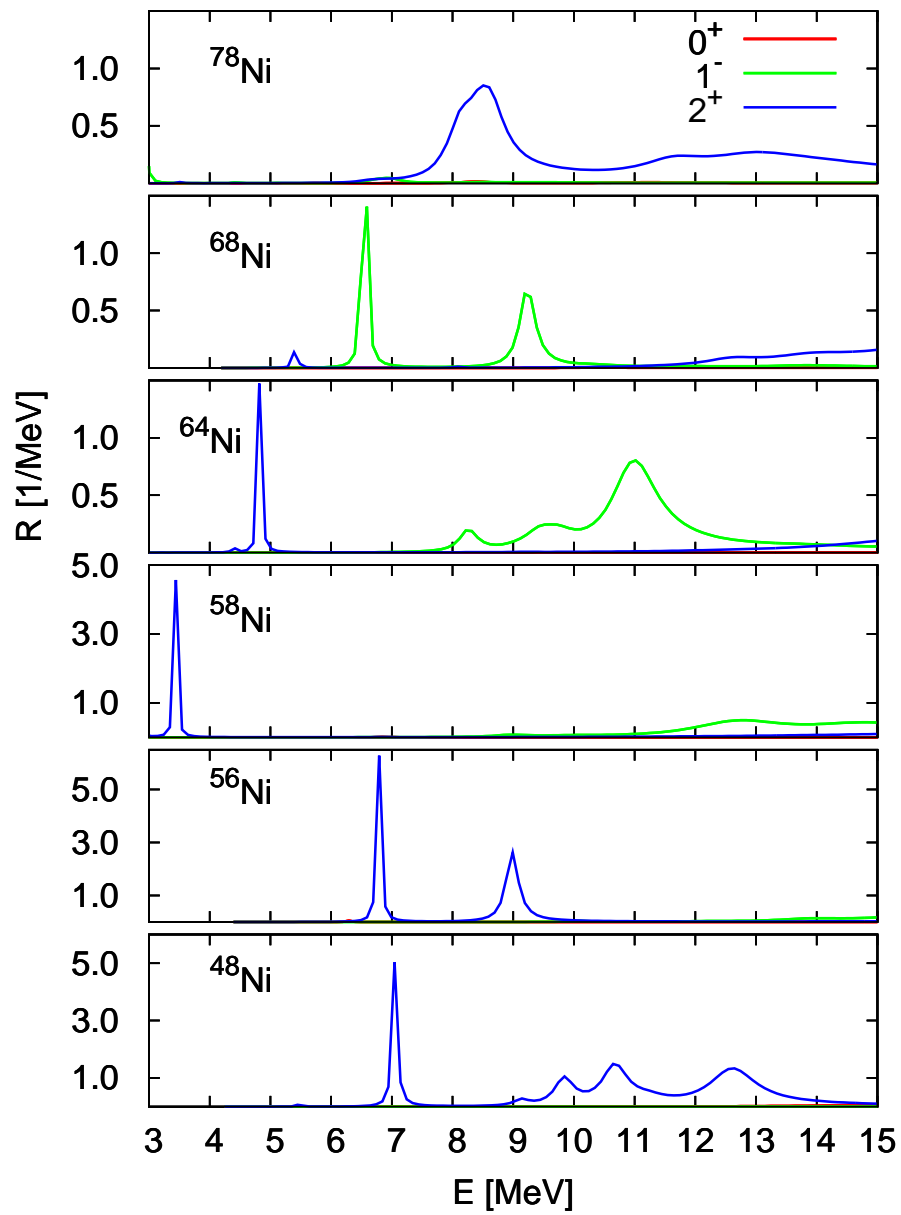


Abbildung 7.52: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Co}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 0$.

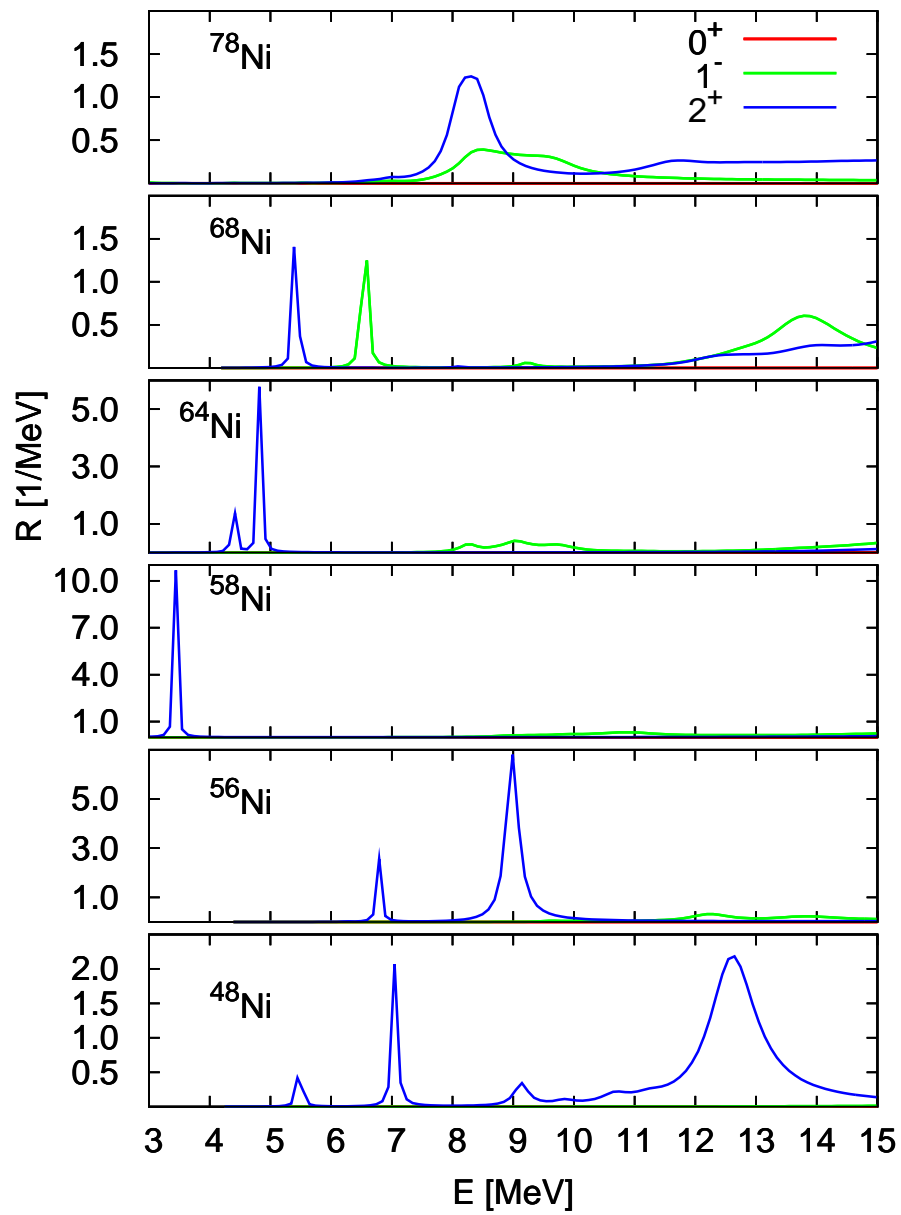


Abbildung 7.53: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Co}$ ($p \rightarrow n$) für natürliche Parität mit $S = 1$.

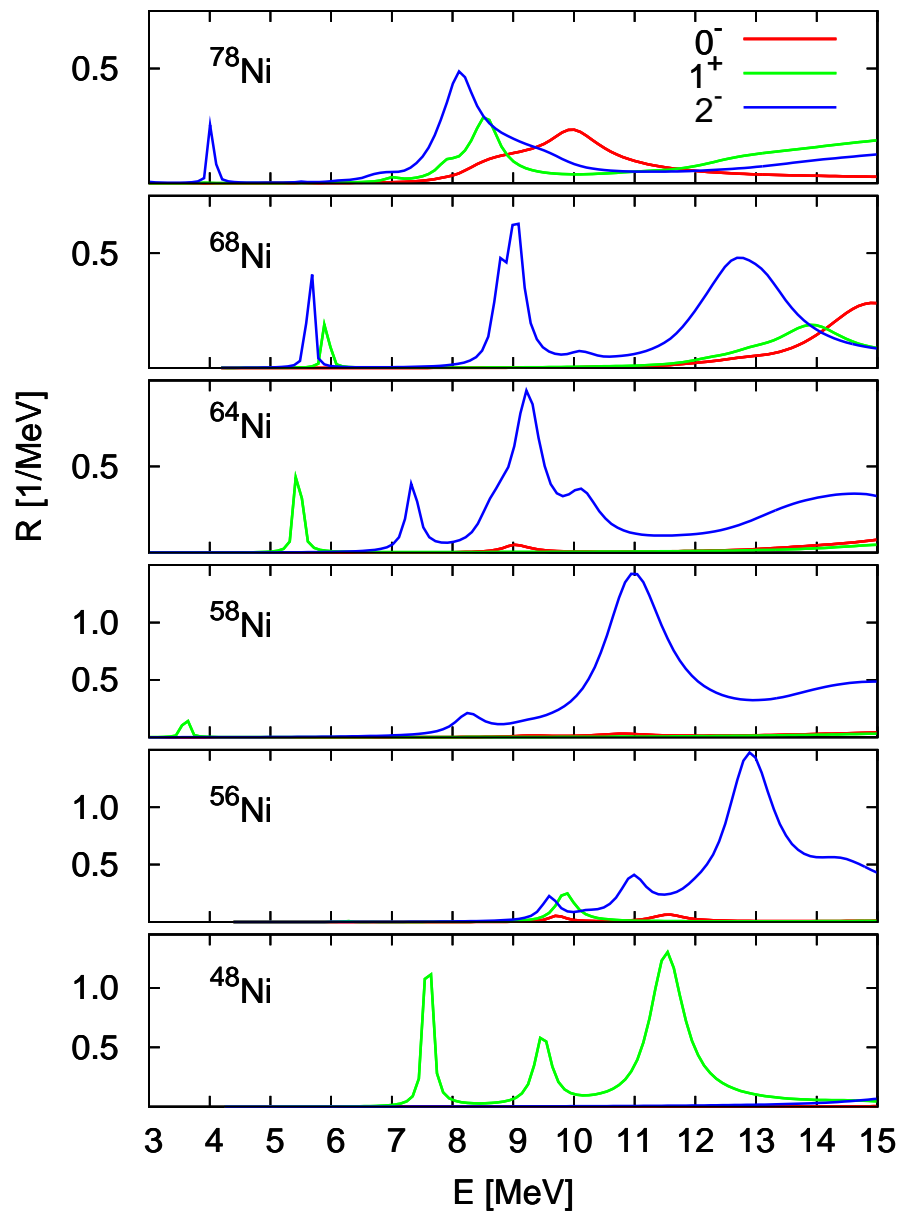


Abbildung 7.54: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Co}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J + 1$.

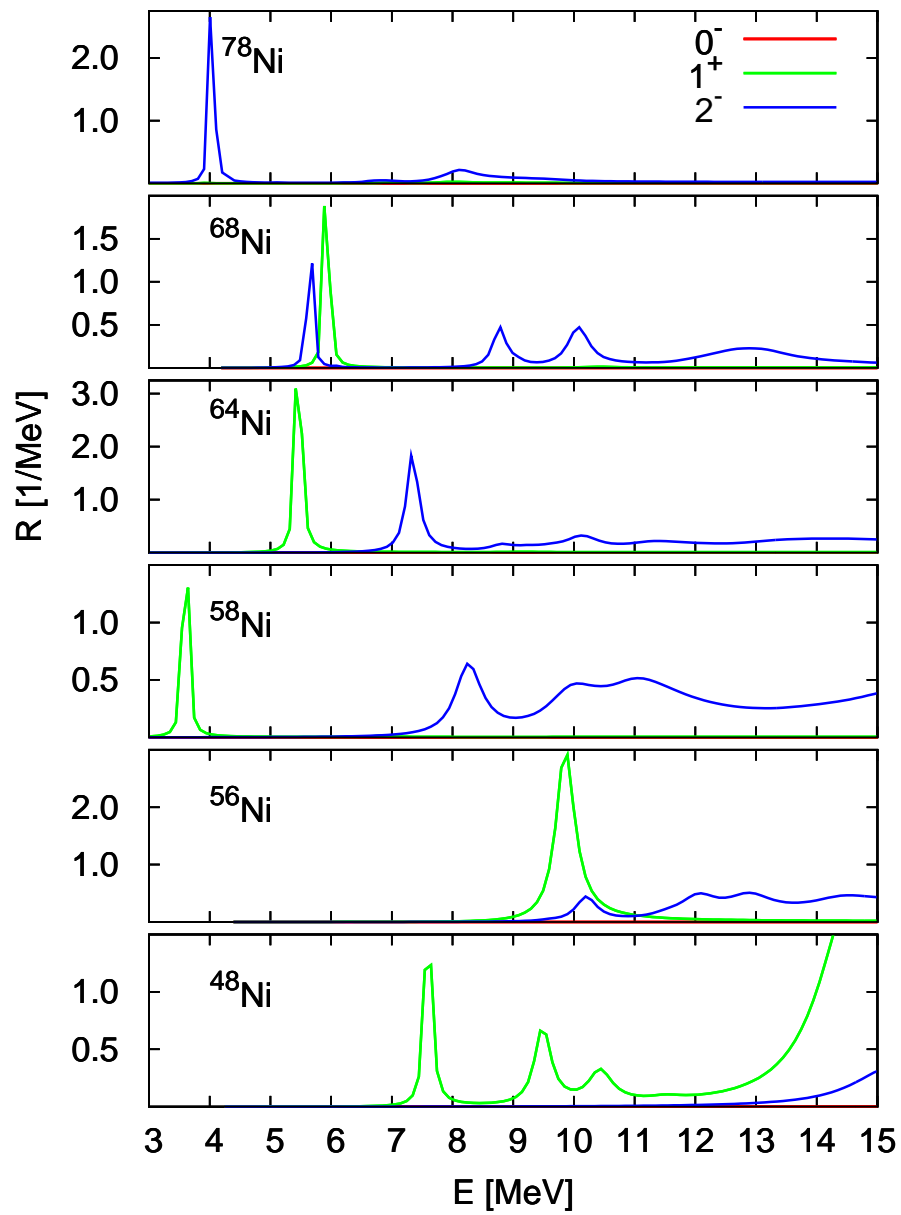


Abbildung 7.55: Antwortfunktion für $\text{Ni} \rightarrow \text{Co}$ ($p \rightarrow n$) für unnatürliche Parität mit $L = J - 1$.

7.6 Einfluß von Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen auf Ladungsaustauschanregungen

Neben dem eigentlichen Prozess der Ladungsaustauschanregung und den gewonnen Antwortfunktionen spielt in der Kernstrukturphysik der Einfluß von Mehrkörperwechselwirkungen eine besondere Rolle. Hierzu werden im Folgenden Antwortfunktionen mit zugrundeliegender Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen (siehe [4]) für ^{56}Fe berechnet. Abbildung 7.56 zeigt die Landau-Migdal-Parameter f'_0 und g'_0 , welche mit den $S = 1$ und $T = 0$ bzw. $S = 1$ und $T = 1$ Kanal der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung verknüpft sind (siehe A.3). Hieraus lässt sich erkennen, dass der Einfluss der Dreikörperkorrelationen sich im f'_0 (d.h. im $S = 1$ und $T = 0$ Kanal) widerspiegelt, wohingegen g'_0 unverändert bleibt.

Vergleicht man Zustandsgleichungen von Zweikörperwechselwirkungen mit denen von Dreikörperwechselwirkungen, so erhält man unterschiedliche Sättigungsdichten. Die Sättigungsdichte für Zweikörperwechselwirkungen liegt weit ab von der empirisch bestimmten Sättigungsdichte von $\rho_0 \approx 0,17 \text{ fm}^{-3}$ bei $\rho_0^{(2)} \approx 0,24 \text{ fm}^{-3}$, wohingegen Dreikörperwechselwirkungen eine Sättigungsdichte von $\rho_0^{(3)} \approx 0,16 \text{ fm}^{-3}$ besitzen. Die Ergebnisse in Abbildung 7.57 bis 7.59 zeigen, dass für eine Beschreibung von Ladungsaustauschanregungen der Einfluss von Dreikörperkorrelationen nur im 0^+ und 1^- Kanal von $S = 0$ Anregungen eine Rolle spielt und in allen anderen Anregungskanälen vernachlässigt werden kann. Ungeachtet der Tatsache, dass hierbei die Nukleonen enger aneinander gepackt sind spielt sich hierbei die Ladungsaustauschanregung im Bereich der Zweikörperkorrelationen ab.

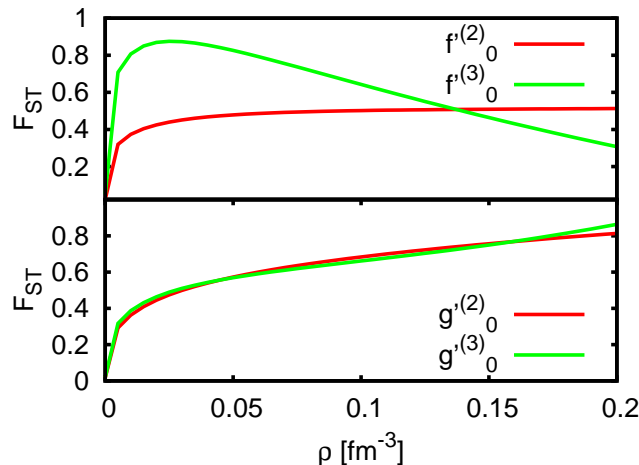


Abbildung 7.56: Vergleich der Landau-Migdal-Parameter f'_0 und g'_0 für Zwei- und Dreikörperwechselwirkung.

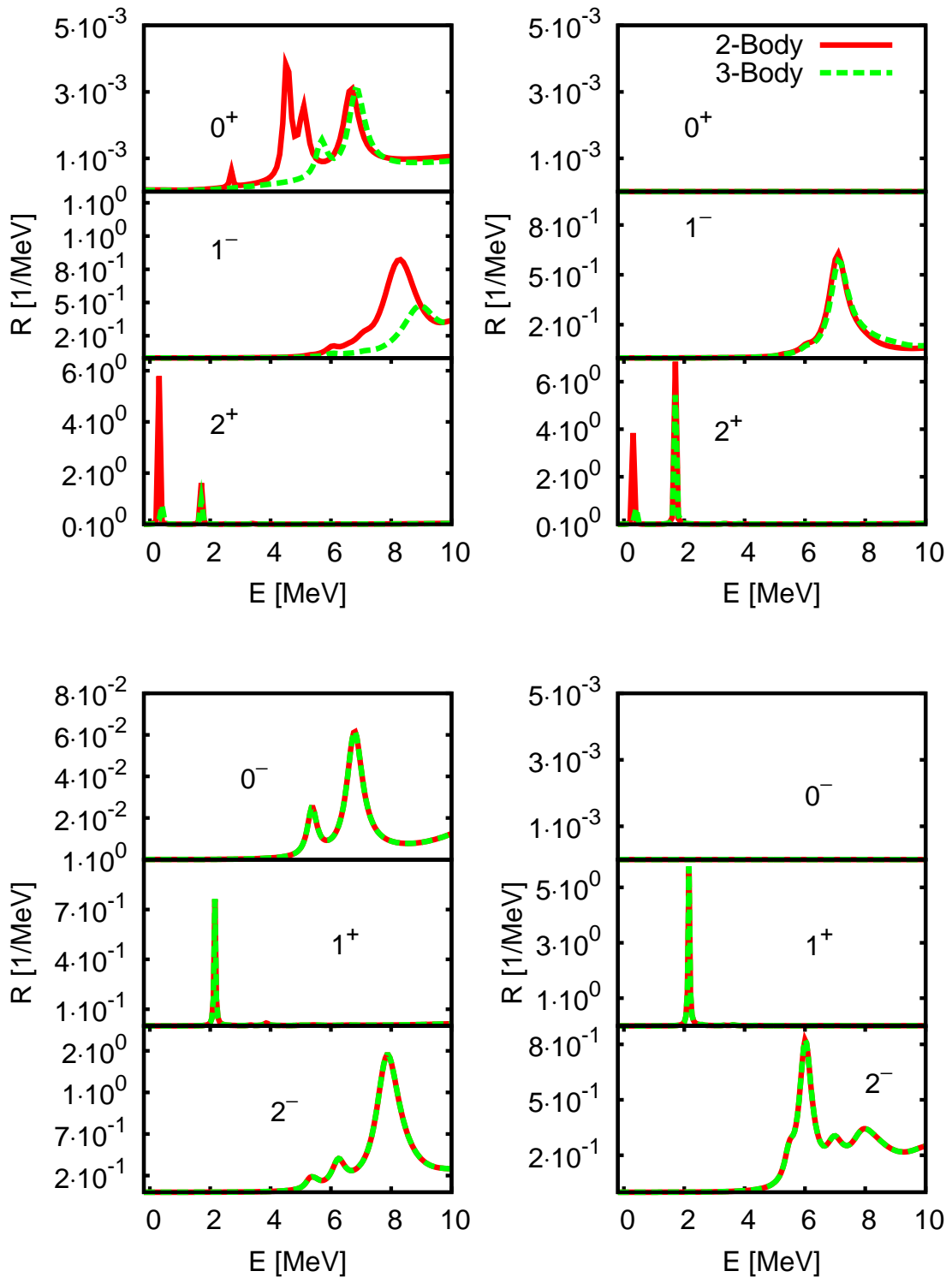


Abbildung 7.57: Vergleich der Antwortfunktion mit Zwei- und Dreikörperwechselwirkung für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ($p \rightarrow n$) (oben links: natürliche Parität $S = 0$, oben rechts: natürliche Parität $S = 1$, unten links: unnatürliche Parität $L = J + 1$, unten rechts: unnatürliche Parität $L = J - 1$).

7.6 Einfluß von Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen auf Ladungsaustauschanregungen

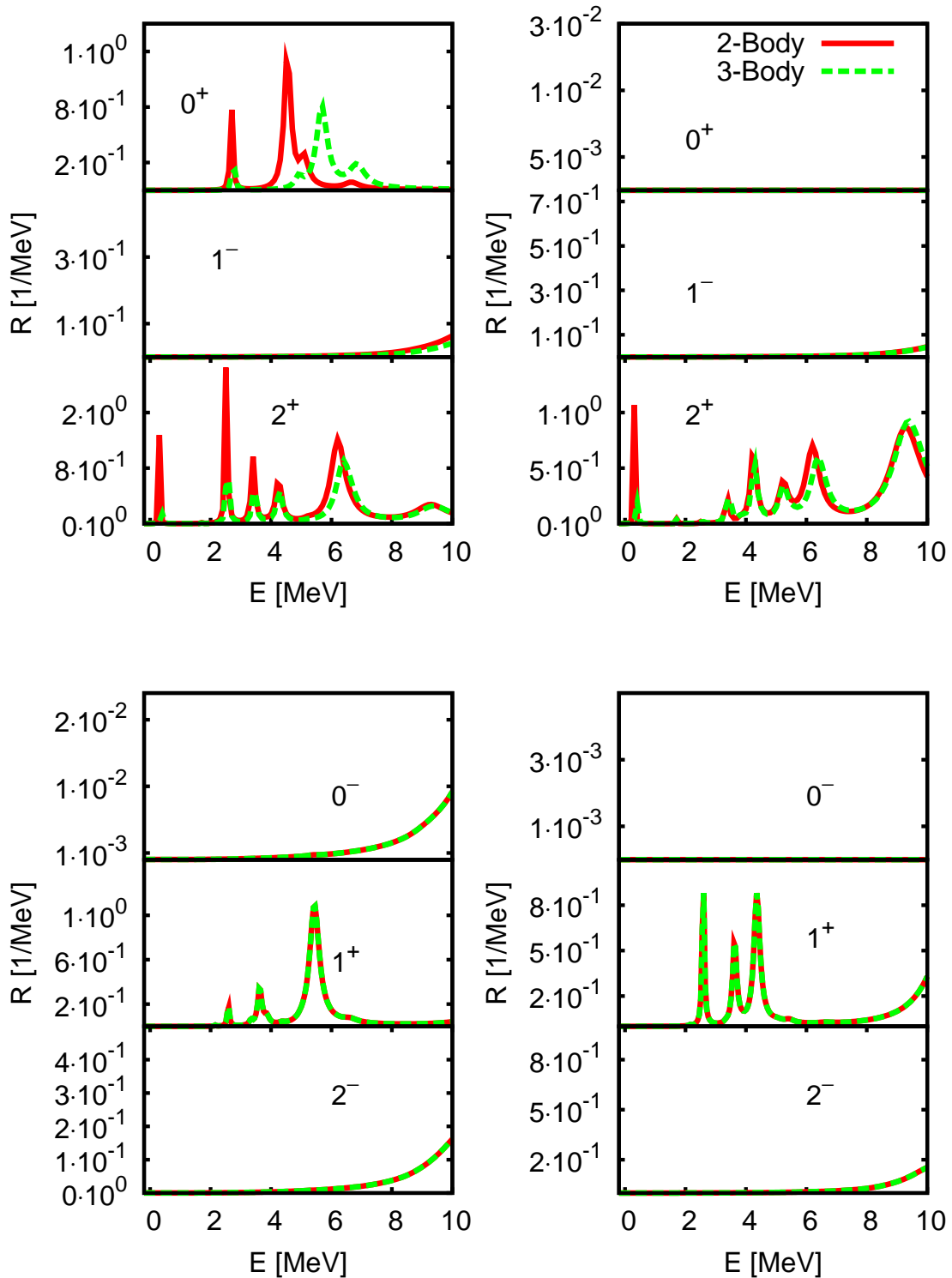


Abbildung 7.58: Vergleich der Antwortfunktion mit Zwei- und Dreikörperwechselwirkung für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) (oben links: natürliche Parität $S = 0$, oben rechts: natürliche Parität $S = 1$, unten links: unnatürliche Parität $L = J + 1$, unten rechts: unnatürliche Parität $L = J - 1$).

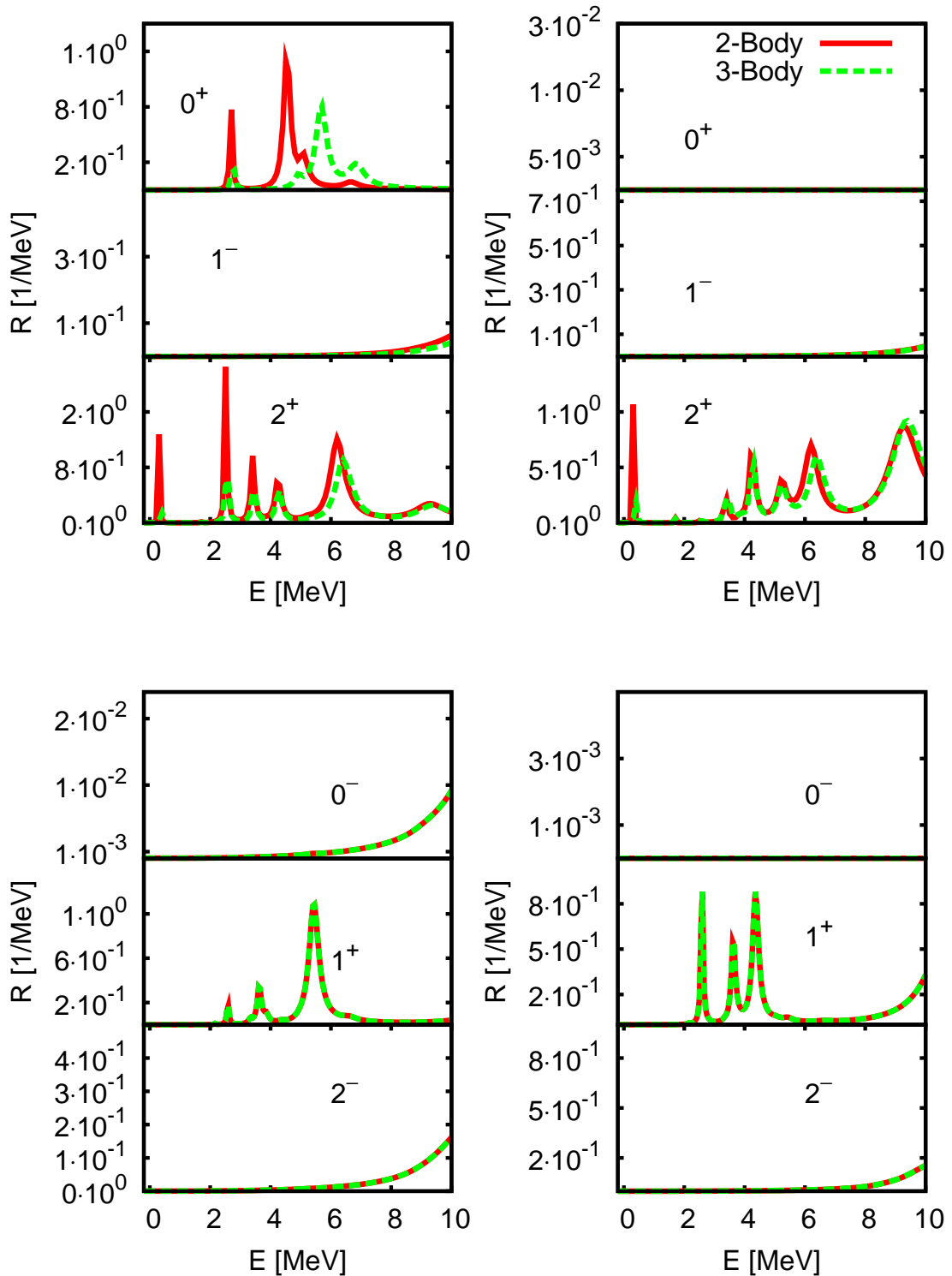


Abbildung 7.59: Vergleich der Antwortfunktion mit Zwei- und Dreikörperwechselwirkung für $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ ($n \rightarrow p$) (oben links: natürliche Parität $S = 0$, oben rechts: natürliche Parität $S = 1$, unten links: unnatürliche Parität $L = J + 1$, unten rechts: unnatürliche Parität $L = J - 1$).

8

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die mikroskopische Untersuchung von Ladungsaustauschanregungen an stabilen und exotischen Kernen. Hierzu wurden zunächst mit Hilfe einer selbstkonsistenten Hartree-Fock-Bogolyubov-Rechnung der Grundzustand bestimmt und ein Einblick der Grundzustandseigenschaften für ausgewählte Beispielkerne gegeben. Ausgehend von diesem Grundzustand wurden mit einer QRPA Rechnung Antwortfunktionen für Ladungsaustauschanregungen für den β^+ - und β^- -Kanal berechnet und mit experimentellen Daten verglichen. Für den Fermi- und Gamow-Teller-Übergang wurden durch Bestimmung der Summenregel die Stärke der jeweiligen Übergänge bestimmt. Um einen Einblick auf die zugrundeliegende Wechselwirkungseffekte zu erhalten wurde ein Vergleich der Antwortfunktionen für Zwei- und Dreikörperwechselwirkungen durchgeführt.

Einen allgemeinen Einblick in die Kernphysik lieferte Kapitel 2. Ausgehend von den elementaren Wechselwirkungen wurden die zugrundeliegenden Kernkräfte vorgestellt. Der Abschnitt über den β -Zerfall gab ein Bild über seine historische Bedeutung und den unterliegenden Mechanismen. Neben den Eigenschaften und Charakterisierungsmerkmalen des β -Zerfalls wurden Ladungsaustauschanregungen als Hilfsmittel für Kernstrukturuntersuchungen eingeführt.

Kapitel 3 gab eine Einführung in den Greenfunktionsformalismus zur Behandlung von Vielteilchenproblemen. Zunächst wurde die Einteilchengreenfunktion eingeführt und deren Eigenschaften anhand der Lehmann-Darstellung erläutert. Anschliessend wurden störungstheoretische Methoden zur Bestimmung der Greenfunktion für nichttriviale Probleme vorgestellt. Ferner wurde das Konzept der Selbstenergie und der Polarization präsentiert. Den Abschluss bildete eine Einführung von kollektive Anregungen, welche, neben den Anregungen von Einteilchenzuständen, weitere Freiheitsgraden in Vielteilchensystemen bilden.

Bevor die Behandlung der kollektive Anregungen weitergeführt wurde, wurde in Kapitel 4 die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Kern behandelt. Zum einen wurde mit Hilfe der Dichtefunktionaltheorie ein Verfahren vorgestellt die effektive Kernwechselwirkung zu bestimmen und mit der Skyrme- und M3Y-Wechselwirkung wurden zwei verbreitete Kerndichtefunktionale angegeben. Zum anderen wurde das Phänomen der Paarkraft erläutert. Hierfür wurde zunächst die Paarkraft eingeführt und ihre Wichtigkeit begründet. Anschließend wurde eine Beschreibung mit Hilfe des für die Supraleitung entwickelten und auf die Kernphysik übertragenen BCS-Modells gegeben. Für eine elegantere Beschreibung der Paarkraft wurde die Bogolyubov-Transformation eingeführt, wodurch

das Teilchen-Loch-Bild ins Quasiteilchen-Quasiloeh-Bild überführt, welche zur Hartree-Fock-Bogolyubov-Gleichung zur Bestimmung des Grundzustands führte.

Anschließend wurden die Ergebnisse für Rechnungen von Grundzustandseigenschaften an ausgewählten Kernen vorgestellt. Neben Grundzustandsenergien und Bindungsenergien gaben Dichteverteilungen und mittleren quadratische Radien einen Einblick über die Struktur der Kerne. Das Beispiel der Nickel Isotopenkette machte die Bildung einer Neutronenhaut mit wachsender Neutronenzahl deutlich.

Kapitel 5 knüpft zum einen an die Behandlung von kollektiven Anregungen aus Kapitel 3 an betrachtet aber das in Kapitel 4 eingeführt Quasiteilchenbild. Zur Bestimmung der Kontinuumsgreenfunktion wird zunächst das Quasiteilchenkontinuum diskretisiert und dessen Kontinuumswellenfunktionen bestimmt.

Kapitel 6 hat anschließend die QRPA vorgestellt, welche bei Berechnung des Polarizationspropagators zum einen Anregungen in den diskreten Teil des Spektrums behandelt, zum anderen aber, durch die Diskretisierung das Quasiteilchenkontinuum, Anregungen im Kontinuum mitberücksichtigt.

Zur Behandlung von Ladungsaustauschanregungen wurde dessen Operator $T_{\lambda\mu}$ eingeführt und mit Hilfe des QRPA-Zustandsoperator Ω die Übergangsmatrixelemente bestimmt. Abschließend wurden die QRPA-Gleichungen für den Prozess der Ladungsaustauschanregungen bestimmt.

Kapitel 7 zeigte Beispielrechnungen für Ladungsaustauschanregungen an ausgewählten Kernen. Zum einen wurden Antwortfunktionen mit experimentellen Daten verglichen und eine gute Übereinstimmung erzielt, zum anderen wurde ein Vergleich zwischen verschiedenen Kernen vorgenommen um charakteristische Merkmale für Spiegelkerne und magische Schalenabschlüsse zu verdeutlichen. Zur Bestimmung der Fermi- und Gamow-Teller-Stärke wurden deren Summenregel bestimmt. Am Beispiel der Nickel Isotopenkette wurde die Änderung der Antwortfunktion für Ladungsaustauschanregungen mit wachsender Neutronenzahl untersucht. Den Abschluss bildete die Abhängigkeit der Ladungsaustauschanregungen von Zwei- und Dreikörperkorrelationen. Zum einen wurde mit Hilfe der Landau-Migdal-Parameter die Auswirkung von Dreikörperkorrelationen auf die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung verdeutlicht und zum andern konnte gezeigt werden, dass der Effekt durch Berücksichtigen von Dreikörperkorrelationen minimal ist.

Abschließend kann festgestellt werden, dass mit der Formulierung der QRPA und der Erweiterung des Spektrums aus dem diskreten Teil ins Kontinuum sich eine gute Beschreibung von kollektive Anregungen, hier am Beispiel von Ladungsaustauschanregungen, ergibt. Anregungsenergien und Übergangsstärken lassen sich sowohl für stabile als auch für exotische Kerne bestimmen. Da im allgemeinen die Energieabhängigkeit der Übergangsstärken für viele in der nuklearen Astrophysik wichtigen Kerne unbekannt ist, ist eine genau Kenntnis über diese Größe von großer Bedeutung zum Verständnis der Effekte in Supernova Explosionen. Zum ändern können im Bereich der Ladungsaustauschanregungen Rechnungen für die Nukleosynthese im r-Prozess vorgenommen werden, um eine bessere Beschreibung der Entstehung der Elemente zu erhalten.

Diese Beschreibung bietet zahlreiche Erweiterungen. So lassen sich neben Ladungsaustauschanregungen die Rechnungen beispielsweise auf Neutrino- und Antineutrino-Streuung [46,47] und Myoneneinfang erweitern und somit ein besseres Verständnis über deren Wechselwirkung mit dem Kern zu erhalten.



Anhang

A.1 Drehimpulskopplung

Bei der Betrachtungen von Systemen, welche aus Teilchen aufgebaut sind die einen Drehimpuls tragen, spielen Größen wie die Gesamtmasse M der Gesamtimpuls, \hat{P} und der Gesamtdrehimpuls \hat{J} eine wichtige Rolle. Die Masse und der Impuls des Gesamtsystems lassen sich im allgemeinen leicht durch die Summe der Einzelmassen und Impulse bilden:

$$M = \sum_i m_i$$

$$\hat{P} = \sum_i \hat{p}_i$$

und die Eigenzustände des Impulses durch einen Produktansatz:

$$|P\rangle = \prod_i |p_i\rangle$$

bestimmen. Für den Fall des Drehimpulses ist dieser einfache Ansatz nicht ausreichend. Im Folgenden soll am Beispiel eines Zweiteilchensystems die Behandlung des Drehimpulses und dessen Kopplung gezeigt werden.

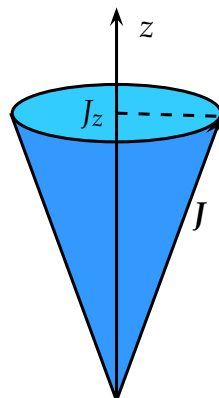


Abbildung A.1: Drehimpulsvektor J bei festgehaltener J_z Komponente.

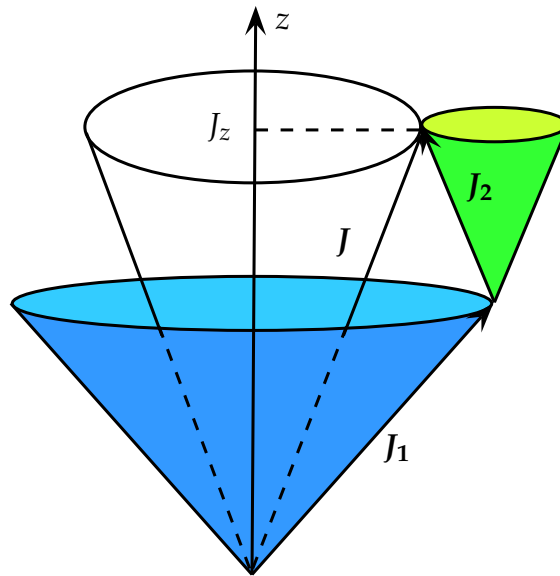


Abbildung A.2: Addition zweier Drehimpulsvektoren J_1 und J_2 bei festgehaltenen J_z Komponenten zum Gesamtdrehimpuls J .

Seien die Drehimpulsoperatoren der beiden Teilchen durch:

$$\hat{f}_1 \quad \text{und} \quad \hat{f}_2$$

und für die Eigenfunktionen $|j_1 m_1\rangle$ und $|j_2 m_2\rangle$ gelte:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle \\ \hat{f}_2^2 |j_2 m_2\rangle &= \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Der Operator des Gesamtimpulses wird als Summe der beiden Drehimpulsoperatoren definiert:

$$\hat{J} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2.$$

Als Ansatz für den gekoppelten Zustand wird zunächst, analog zum Gesamtimpulszustand, der Produktansatz:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

gewählt. Dieser Zustand ist Eigenzustand zu \hat{J}_z :

$$\begin{aligned} \hat{J}_z |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ &= \hbar(m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

aber nicht zu \hat{j}^2 . Zur Bestimmung der Eigenzustände wird zunächst ein vollständige Satz an kommutierender Operatoren bestimmt. Hierfür betrachte man die unterschiedlichen Kombinationen von Kommutatoren. Für \hat{J}_{1z} mit \hat{J}_{2z} verschwinden diese Kommutatoren:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{j}_1^2] &= [\hat{J}_z, \hat{j}_2^2] = [\hat{j}_z^2, \hat{j}_1^2] = [\hat{j}_z^2, \hat{j}_2^2] = 0 \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_{1z}] &= [\hat{J}_z, \hat{J}_{2z}] = 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man hingegen den Kommutator des Quadrates des Gesamtdrehimpulses \hat{j}^2 mit den z-Projektionen \hat{J}_1 und \hat{J}_2 so ergibt dies:

$$\begin{aligned} [\hat{j}^2, \hat{J}_{1z}] &= \underbrace{[\hat{j}_1^2, \hat{J}_{1z}]}_{=0} + \underbrace{[\hat{j}_2^2, \hat{J}_{1z}]}_{=0} + [2\hat{J}_1\hat{J}_2, \hat{J}_{1z}] \\ &= 2i\hbar (\hat{J}_{2y}\hat{J}_{1x} - \hat{J}_{2x}\hat{J}_{1y}) \end{aligned}$$

Demnach bilden \hat{j}^2 , \hat{J}_z , \hat{j}_1^2 und \hat{j}_2^2 einen vollständigen Satz an kommutierenden Operatoren. Die Drehimpulskopplung besteht nun darin die Quantenzahlen m_1 und m_2 durch j und j_z zu ersetzen. Führt man den neuen Eigenzustand $|jmj_1j_2\rangle$ des Systems ein, so kann die unitäre Matrix die auf diese Basis führt durch:

$$|jmj_1j_2\rangle = \sum_{m_1m_2} |j_1m_1j_2m_2\rangle \langle j_1m_1j_2m_2|jmj_1j_2\rangle$$

bestimmt werden. Die Transformationskoeffizienten sind die Clebsch-Gordon-Koeffizienten:

$$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle = \langle j_1m_1j_2m_2|jmj_1j_2\rangle.$$

Formeln und Tabellen für die Clebsch-Gordon-Koeffizienten können in der Literatur über Drehimpulse (bspw. [20],[23]) gefunden werden.

A.2 Wigner-Eckart-Theorem

Das Wigner-Eckart-Theorem bietet die Möglichkeit das Matrixelement eines irreduziblen Tensors \hat{T} zwischen zwei wohl definierten Drehimpulszuständen zu bestimmen. Das Matrixelement wird hierbei in einen von der magnetischen Quantenzahl m abhängigen Teil und einen unabhängigen Teil faktorisiert.

Man betrachte das Matrixelement eines irreduziblen Tensors \hat{T} :

$$\langle \beta j' m' | \hat{T}_q^k | \alpha j m \rangle,$$

mit allen nicht vom Drehimpulsabhängigen Quantenzahlen in α und β . Führt man den Zustand $|\gamma j'' m''\rangle$ als zu gutem Drehimpuls gekoppelten Zustand:

$$|\gamma j'' m''\rangle = \sum_{mq} (k m j m'' | j m) \hat{T}_q^k | \alpha j m \rangle$$

ein, so kann mit Hilfe der invertierten Transformation:

$$\hat{T}_q^k | \alpha j m \rangle = \sum_{j'' m''} (k m j m'' | j m) |\gamma j'' m''\rangle$$

das Matrixelement zu

$$\begin{aligned} \langle \beta j' m' | \hat{T}_q^k | \alpha j m \rangle &= \sum_{j'' m''} (k q j'' m'' | j m) \langle \beta j' m' | \gamma j'' m'' \rangle \\ &= (k q j' m' | j m) \langle \beta j' m' | \gamma j' m' \rangle \end{aligned}$$

umgeschrieben werden. Die Relation:

$$\begin{aligned} \langle \beta j m + 1 | \gamma j m + 1 \rangle &= \frac{\langle \beta j m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | \gamma j m \rangle}{\sqrt{\langle \beta j m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | \beta j m \rangle \langle \gamma j m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | \gamma j m \rangle}} \\ &= \langle \beta j m | \gamma j m \rangle \end{aligned}$$

zeigt, dass die m' -Abhängigkeit des zweiten Matrixelementes verschwunden ist. Das Matrixelement kann somit als Produkt eines Clebsch-Gordon-Koeffizienten, der die Geometrie bzw. die Symmetrieeigenschaften des Systems und einem Matrixelement, das die Dynamik des physikalischen Prozesses beschreibt, geschrieben werden. Dies wird durch die Einführung des reduzierten Matrixelementes $\langle \beta j' || T^k || \gamma j' \rangle$ deutlich gemacht:

$$\langle \beta j' m' | \hat{T}_q^k | \alpha j m \rangle = (-1)^{2k} (k q j' m' | j m) \langle \beta j' || T^k || \gamma j' \rangle.$$

Zur Bestimmung des reduzierten Matrixelementes berechnet das Matrixelement des irreduziblen Tensors für ein passendes Kombination aus m , m' und q und bestimmt daraus den Wert des reduzierten Matrixelementes, welcher dann für weitere Kombinationen verwenden werden kann.

A.3 Die Landau-Migdal Theorie

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Eigenschaften von angeregten Zuständen bietet die Landau-Migdal-Theorie wechselwirkender Fermionensysteme. Die Landau-Migdal-Theorie erlaubt es Anregungszustände von unendlichen Systemen wechselwirkender Fermionen, wie beispielsweise flüssiges ^3He oder Kernmaterie, zu untersuchen. Landaus Hauptannahme ist, dass das wechselwirkende System durch ein nichtwechselwirkendes System beschrieben werden kann, indem man adiabatisch die Wechselwirkung einschaltet. Dies bedeutet, dass es eine eindeutige Beziehung zwischen den Einteilchenzuständen und den so genannten Quasiteilchenzuständen im wechselwirkenden System gibt. Diese Quasiteilchen verhalten sich im wechselwirkenden System wie reale Teilchen im nichtwechselwirkenden System. Um solche Quasiteilchen zu beschreiben, betrachtet Landau die Gesamtenergie des wechselwirkenden Systems als ein Funktional der Besetzungszahlfunktion $n(\mathbf{k})$ des Quasiteilchenzustands \mathbf{k} . Die Quasiteilchenenergien sind durch die erste funktionale Ableitung der Gesamtenergie nach $n(\mathbf{k})$ gegeben und die Wechselwirkung durch die zweite funktionale Ableitung. Die renormalisierte Quasi-Teilchen-Wechselwirkung ist spin- und impulsabhängig und lässt sich an der Fermi-Oberfläche nach Legendre-Polynomen entwickeln.

Migdal erweiterte diese Idee auf endliche Fermionensysteme und wendete sie auf Atomkerne an. Zum einen muss nun mit zwei Arten von Fermionen gerechnet werden (Protonen und Neutronen), zum anderen liegt eine relativ kleine Anzahl von Teilchen vor und die Quasiteilchen-Wechselwirkung ist zusätzlich Isospin abhängig. Wie schon bei unendlichen Systemen wird hier auch nach Legendre-Polynomen entwickelt und man erhält die bekannten Entwicklungskoeffizienten, die Landau-Migdal-Parameter (LMP).

Wie schon erwähnt, betrachten man die Energie des wechselwirkenden Systems als ein Funktional der Besetzungszahlfunktion $n(\mathbf{k})$ der Quasiteilchen ($E = E(n(\mathbf{k}))$). Eine Anregung des Systems ist im wesentlichen durch die Änderung der Besetzungszahlfunktion um die Größe $\delta n(\mathbf{k})$ gegeben. Die entsprechende Änderung der Energie ist:

$$\begin{aligned} \delta E &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon^0(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta n(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}') \\ &= \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon^0(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta n(\mathbf{k})] \delta n(\mathbf{k}') \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}'), \end{aligned}$$

mit $\epsilon^0(\mathbf{k})$ die Gleichgewichtsenergie der Quasiteilchen. Die Energie der Qua-

senteilchen $\epsilon(\mathbf{k})$ und die Wechselwirkung zwischen den Quasiteilchen und den Quasilöchern $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ist durch die funktionalen Ableitungen der Energie nach der Besetzungszahlfunktion gegeben:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\delta E}{\delta n(\mathbf{k})}, \quad f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\delta^2 E}{\delta n(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}')}.$$

Durch die explizite Spin- und Isospin-Abhängigkeit erhält man für die Wechselwirkung

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + F'(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}' + [G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + G'(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}'] \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.1})$$

Durch die Voraussetzung, dass der Hauptanteil der Wechselwirkung nahe der Fermi-Oberfläche stattfindet und somit nur vom Winkel θ zwischen \mathbf{k} und \mathbf{k}' abhängt ist, wird eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen möglich:

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_l F_l P_l(\cos \theta). \quad (\text{A.2})$$

Die Entwicklungskoeffizienten F_l werden als LMP bezeichnet. Um dimensionslose Parameter zu erhalten, definieren wir:

$$F_l = C_0 f_l,$$

mit C_0 als inverse Zustandsdichte an der Fermi-Oberfläche:

$$\begin{aligned} C_0 &= \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right)^{-1} \Big|_{\epsilon=\epsilon_F} \\ &= \left(\frac{2k_F M^*}{(\hbar\pi)^2} \right)^{-1} = N_0^{-1}(k_F). \end{aligned}$$

Dementsprechend ist es möglich, auch die weiteren Komponenten der Wechselwirkung (A.1) zu entwickeln und somit die Parameter f'_l, g_l, g'_l der einzelnen Terme zu definieren.

Mit Hilfe der LMP lassen sich auch die Systemeigenschaften des Kerns beschreiben, wie beispielsweise die Kompressibilität K :

$$K = k_F^2 \frac{d^2(\frac{E}{A})}{dk_F^2} = 6 \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} (1 + 2f_0),$$

die Symmetrie-Energie β :

$$\beta = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} (1 + 2f'_0)$$

und die effektive Masse m^* :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{2}{3}f_1.$$

Diese Parameter lassen sich experimentell bestimmen und können dazu benutzt werden, um weitere Vorhersagen zu treffen. Die Größen gehen auch in die Bestimmung der Gleichung für $\delta n(\mathbf{k}, \omega)$ ein, deren Lösung kleine bosonartige Anregungen im Fermionensystem bestimmt. Im Kern entsprechen diese Anregungen der Multipol-Riesenresonanz (siehe Beispielsweise [39]).

Durch die Einschränkung der Entwicklung (A.2) auf die niedrigste Ordnung ($l = 0$) erhält man eine im Impulsraum konstante Wechselwirkung, was zu einer Delta-Funktion im Ortsraum führt:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = C_0 [f(\mathbf{r}) + f'(\mathbf{r})\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}'_2 + (g + g'\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}'_2) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A.3})$$

Die nächste Ordnung ($l = 1$) führt eine Impulsabhängigkeit in die Teilchen-Loch-Wechselwirkung ein.

Ein Vergleich des Ansatzes für die NN-Wechselwirkung mit Gleichung A.3 zeigt den Zusammenhang mit den LMP. Im $S = 0$ und $T = 0$ Kanal muss durch den Übergang auf endliche Kern ein Rearrangement-Term $f_r(k_f)$ berücksichtigt werden. Man erhält somit für die LMP der Wechselwirkung:

$$\begin{aligned} f_0 &= N_0(k_F)V_{00} + f_r(k_F), \\ f'_0 &= N_0(k_F)V_{10}, \\ g_0 &= N_0(k_F)V_{01}, \\ g'_0 &= N_0(k_F)V_{11}. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. Akmal, V. R. Pandharipande, and D. G. Ravenhall, *Equation of state of nucleon matter and neutron star structure*, Phys. Rev. C **58** (1998Sep), no. 3, 1804–1828.
- [2] N. Argaman and G. Makov, *Density functional theory: An introduction*, American Journal of Physics **68** (January 2000), 69–79, available at [arXiv:physics/9806013](https://arxiv.org/abs/physics/9806013).
- [3] D. Arnett, *Supernovae and nucleosynthesis*, Princeton University Press, 1996.
- [4] A. A. Ataie, *Rpa theorie für schwache zerfälle von exotischen kernen*, Master's Thesis, 2006.
- [5] G. Audi and A. H. Wapstra, *The 1995 update to the atomic mass evaluation*, Nuclear Physics A **595** (1995), no. 4, 409–480.
- [6] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108** (1957Dec), no. 5, 1175–1204.
- [7] S. T. Belyaev, Kgl. Danske Videnskab Selskab Mat.Fys. Medd **31** (1959), no. 11.
- [8] G. Bertsch, J. Borysowicz, H. McManus, and W.G. Love, *Interactions for inelastic scattering derived from realistic potentials*, Nuclear Physics A **284** (1977), no. 3, 399–419.
- [9] Bethge, Walter, and Wiedemann, *Kernphysik*, Springer, 2007.
- [10] N. N. Bogolyubov, Soviet Phys. JETP **7** (1958), no. 47.
- [11] ———, Soviet Phys. Usp. **2** (1959), no. 236.
- [12] F. Bosch, T. Faestermann, J. Friese, F. Heine, P. Kienle, E. Wefers, K. Zeitelhack, K. Beckert, B. Franzke, O. Klepper, C. Kozhuharov, G. Menzel, R. Moshhammer, F. Nolden, H. Reich, B. Schlitt, M. Steck, T. Stöhlker, T. Winkler, and K. Takahashi, *Observation of bound-state β^- decay of fully ionized ^{187}re : $^{187}\text{re}-^{187}\text{os}$ cosmochronometry*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996Dec), no. 26, 5190–5193.
- [13] C. Bérat, M. Buenerd, J. Chauvin, J. Y. Hostachy, D. Lebrun, P. Martin, J. Barrette, B. Berthier, B. Fernandez, A. Miczaika, W. Mittig, E. Stiliaris, W. Von Oertzen, H. Lenske, and H. H. Wolter, *Heavy ion charge exchange reactions to probe the giant electric isovector modes in nuclei*, Physics Letters B **218** (1989), no. 3, 299–303.
- [14] C. Brendel, P. von Neumann-Cosel, A. Richter, G. Schrieder, H. Lenske, H. H. Wolter, J. Carter, and D. Schüll, *Quasi-elastic nucleon transfer and single charge exchange in $48\text{ti} + 42\text{ca}$ collisions*, Nuclear Physics A **477** (1988), no. 1, 162–188.
- [15] A. Cunsolo S. Fortier A. Foti A. Lazzaro H. Lenske S.E.A. Orrigo J.S. Winfield C. Nociforo F. Cappuzzello, *Investigations of light neutron-rich nuclei via the $(^7\text{li}, ^7\text{be})$ reaction*, Act.Phys.Pol. B **34** (2003), no. 2387.

- [16] F. Cappuzzello, H. Lenske, A. Cunsolo, D. Beaumel, S. Fortier, A. Foti, A. Lazzaro, C. Nociforo, S. E. A. Orrigo, and J. S. Winfield, *Analysis of the $11b(7li, 7be)11be$ reaction at 57 mev in a microscopic approach*, Nuclear Physics A **739** (2004), no. 1-2, 30–56.
- [17] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer, *A skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities*, Nuclear Physics A **627** (1997), no. 4, 710–746.
- [18] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Evidence for the 2π decay of the k_2^0 meson*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964Jul), no. 4, 138–140.
- [19] F. de Jong and H. Lenske, *Asymmetric nuclear matter in the relativistic brueckner-hartree-fock approach*, Phys. Rev. C **57** (1998Jun), no. 6, 3099–3107.
- [20] V. Devanathan, *Angular momentum techniques in quantum mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [21] W. H. Dickhoff and D. Van Neck, *Many-body theory exposed!*, World Scientific Pub Co, 2005.
- [22] R.M. Dreizler and E.K.U. Gross, *Density functional theory*, Springer-Verlag, 1990.
- [23] A. R. Edmunds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Reissue, Princeton University Press, 1996.
- [24] S. Fortier A. Foti M.Khaled H. Laurent H. Lenske J.M. Maison A.L. Melita C. Nociforo L. Rosier C. Stephan L. Tassan-Got J.S. Winfield H.H. Wolter F. Cappuzzello A. Cunsolo, *Excited states of ^{11}be* , Phys. Lett. B **516** (2001), no. 21.
- [25] E. Fermi, *Application of statistical gas methods to electronic systems*, Accad. Lincei **6** (1927), 602–607.
- [26] ———, *Statistical methods of investigating electrons in atoms*, Z. Phys **48** (1928), 73–79.
- [27] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, MCGRAW-HILL BOOC COMPANY, 1971.
- [28] S. Focardi and R. Ricci, *Historical introduction. the β -decay and the fundamental properties of weak interactions*, La Rivista del Nuovo Cimento (1978-1999) **6** (1983), 1–40. 10.1007/BF02740918.
- [29] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, *Advantages of the color octet gluon picture*, Physics Letters B **47** (1973), no. 4, 365–368.
- [30] W. Greiner and J. Maruhn, *Kernmodelle*, Harri Deutsch, 1995.
- [31] E. W. Grewe, C. Bäumer, A. M. van den Berg, N. Blasi, B. Davids, D. De Frenne, D. Frekers, P. Haefner, M. N. Harakeh, M. Huynyadi, E. Jacobs, B. Junk, A. Korff, A. Negret, P. von Neumann-Cosel, L. Popescu, S. Rakers, and H. J. Wörtche, *Gamow-teller transitions to ^{32}p studied through the $^{32}s(d, ^2he)$ reaction at $e_d = 170\text{mev}$* , Phys. Rev. C **69** (2004Jun), no. 6, 064325.
- [32] Particle Data Group, *Particle physics booklet*, Institute of Physics Publishing, 2006.
- [33] R. Helmer, *The triumph charge-exchange facility*, Can. J. Phys. **65** (1987), no. 6, 588–594.
- [34] F. Hofmann, C. M. Keil, and H. Lenske, *Density dependent hadron field theory for asymmetric nuclear matter and exotic nuclei*, Phys. Rev. C **64** (2001Aug), no. 3, 034314.
- [35] F. Hofmann and H. Lenske, *Hartree-fock calculations in the density matrix expansion approach*, Phys. Rev. C **57** (1998May), no. 5, 2281–2293.

- [36] P. Hohenberg and W. Kohn, *Inhomogeneous electron gas*, Phys. Rev. **136** (1964Nov), no. 3B, B864–B871.
- [37] K. Ikeda, Prog. Theor. Phys. **31** (1964), 434.
- [38] Karp JS, S Surti, and Daube-Witherspoon ME et al., *Performance of a brain pet camera based on anger-logic gadolinium oxyorthosilicate detectors*, J Nucl Med **44** (2003), no. 8.
- [39] S. Kamerdzhiev, J. Speth, and G. Tertychny, *Extended theory of finite fermi systems: collective vibrations in closed shell nuclei*, Physics Reports **393** (2004), no. 1, 1–86.
- [40] Dao T. Khoa, W. von Oertzen, and A. A. Ogloblin, *Study of the equation of state for asymmetric nuclear matter and interaction potential between neutron-rich nuclei using the density-dependent $m3\gamma$ interaction*, Nuclear Physics A **602** (1996), no. 1, 98–132.
- [41] G. C. Kiang, H. Orihara, Y. Takahashi, A. Satoh, T. Niizeki, J. Takamatsu, M. Kabasawa, T. Kawamura, K. Furukawa, T. Nakagawa, K. Maeda, K. Ishii, K. Miura, L. L. Kiang, P. K. Teng, and H. Ohnuma, *Spectroscopy of ^{24}Al through the $^{24}\text{Mg}(p, n)^{24}\text{Al}$ reaction at $ep = 35$ mev*, Nuclear Physics A **499** (1989), no. 2, 339–352.
- [42] W. Kohn and L. J. Sham, *Self-consistent equations including exchange and correlation effects*, Phys. Rev. **140** (1965Nov), no. 4A, A1133–A1138.
- [43] H. Lenske, H. H. Wolter, and H. G. Bohlen, *Reaction mechanism of heavy-ion charge-exchange scattering at intermediate energies*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989Mar), no. 13, 1457–1460.
- [44] R. K. Bhaduri M. A. Preston, *Structure of the nucleus*, Westview Press, 1993.
- [45] I. A. Stegun M. Abramowitz, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, 1965.
- [46] M. Martini, M. Ericson, G. Chanfray, and J. Marteau, *Unified approach for nucleon knock-out and coherent and incoherent pion production in neutrino interactions with nuclei*, Phys. Rev. C **80** (2009Dec), no. 6, 065501.
- [47] ———, *Neutrino and antineutrino quasielastic interactions with nuclei*, Phys. Rev. C **81** (2010Apr), no. 4, 045502.
- [48] S. Nakayama, T. Yamagata, K. Yuasa, M. Tanaka, H. G. Bohlen, H. Lenske, H. H. Wolter, M. Inoue, T. Itahashi, and H. Ogata, *Excitation of isovector states by the $(7\text{Li}, 7\text{Be})$ reaction on ^{12}C and ^{13}C* , Nuclear Physics A **507** (1990), no. 2, 515–530.
- [49] P. Schuck P. Ring, *The nuclear many-body problem*, Springer, 1980.
- [50] S. Rakers, C. Bäumer, D. Frekers, R. Schmidt, A. M. van den Berg, V. M. Hannen, M. N. Harakeh, M. A. de Huu, H. J. Wörtche, D. De Frenne, M. Hagemann, J. Heyse, E. Jacobs, and Y. Fujita, *Gamow-teller matrix elements from the $^{12}\text{C}(d, ^2\text{He})$ and $^{24}\text{Mg}(d, ^2\text{He})$ reactions at 170 mev*, Phys. Rev. C **65** (2002Apr), no. 4, 044323.
- [51] R.V. Reid, *Local phenomenological nucleon–nucleon potentials.*, Ann. Phys. (N.Y.) **50** (1968).
- [52] K.-H. Schmidt, W. Faust, G. Münzenberg, H.-G. Clerc, W. Lang, K. Pielenz, D. Vermeulen, H. Wohlfarth, H. Ewald, and K. Güttner, *Alpha decay properties of new protactinium isotopes*, Nuclear Physics A **318** (1979), no. 1-2, 253–268.
- [53] Franz Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer-Verlag, 2002.

LITERATURVERZEICHNIS

- [54] ———, *Quantenmechanik für fortgeschrittene (qm ii) quantenmechanik für fortgeschrittene*, 5., Springer, 2008.
- [55] T. H. R. Skyrme, *The effective nuclear potential*, Nuclear Physics **9** (Unknown Month 1958), no. 4, 615–634.
- [56] L. H. Thomas, *The calculation of atomic fields.*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **23** (1927), 542–548.
- [57] J. Valatin, *Comments on the theory of superconductivity*, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **7** (1958), 843–857.
- [58] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, *Experimental test of parity conservation in beta decay*, Phys. Rev. **105** (1957Feb), no. 4, 1413–1415.
- [59] W. R. Zimmerman, J. J. Kraushaar, M. J. Schneider, and H. Rudolph, *reaction $^{56}\text{Fe}({}^3\text{He}, t){}^{56}\text{Co}$* , Phys. Rev. C **16** (1977Dec), no. 6, 2432–2436.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Vor allem möchte ich mich bei meinem Betreuer, Prof. Dr. Horst Lenske dafür bedanken, an diesem Projekt arbeiten zu dürfen und für die vielen anregenden und konstruktiven Diskussionen die in diese Arbeit eingeflossen sind. Darüber hinaus bedanke ich mich für die finanzielle Unterstützung durch das Graduiertenkolleg "Complex Systems of Hadrons and Nuclei" sowie das "Helmholtz International Center for FAIR".

Ich danke Elke Jung und Ilka Sproates für die Bewältigung aller administrativer Probleme. Ein besonderer Dank geht hierbei an Elke Jung, die für jede Anfrage eine Lösung parat hat. Sie ist unentbehrlich.

Besonderer Dank für die angenehme Gesellschaft und für die gemeinsame Zeit geht an meine Mitstreiter Andreas Fedoseew und Fabian Eichstädt. Ohne euch hätte das Studium und die Promotion nicht halb soviel Spaß gemacht.

Bei Dr. Stefano Mattiello bedanke ich mich für die Mühe und Geduld die er sich bei der Durchsicht des Manuskripts gegeben hat und für die hilfreichen Korrekturvorschläge.

Für das gute Klima am Institut und für viele interessante Gespräche, bei denen es nicht immer nur um Physik ging, bedanke ich mich bei allen Institutsmitgliedern und ehemaligen Institutsmitgliedern, dabei insbesondere bei: Dr. Stefan Bender, Dr. Oliver Buss, Dr. Frank Frömel, Dr. Theodoros Gaitanos, Dr. Kai Gallmeister, Dr. Hendrik van Hees, Dr. Patrick Konrad, Ivan Lappo-Danilevski, Dr. Tina Leitner, Prof. Dr. Stefan Leupold und Janus Weil.

Mein weiterer Dank gilt der Judo Truppe des TSV-Lang-Göns und des allgemeinen Hoschulsports, die es ermöglichten den körperlichen Ausgleich zur geistigen Arbeit zu bieten.

Ganz besonderer Dank geht an meine Eltern und meine Geschwister, die mich während meines langen Studiums immer unterstützten und es mir so ermöglichten, meine Ziele zu verwirklichen.