

# Relativistische Feldtheorie für exotische Kerne und seltsame Kernmaterie

## Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Fachbereich 7 – Mathematik, Physik, Geographie

vorgelegt von

**Frank Hofmann**

aus Frankfurt

Gießen 2000

D26

Dekan: Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher

I. Berichterstatter: Prof. Dr. Horst Lenske

II. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 26.09.2000

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
<b>I Dirac-Brückner-Rechnungen und effektive Vertizes</b>	<b>9</b>
<b>1 Dirac-Brückner Theorie</b>	<b>11</b>
1.1 Die relativistische NN-Wechselwirkung . . . . .	12
1.2 Die relativistische NN-Wechselwirkung im Medium . . . . .	14
1.3 Berechnung der Selbstenergien . . . . .	16
<b>2 Dichteabhängige Hadronenfeldtheorie</b>	<b>19</b>
2.1 Die erweiterte QHD Lagrangedichte . . . . .	20
2.2 Die Bewegungsgleichungen . . . . .	22
2.3 Mittelfeld- oder Hartree-Näherung . . . . .	25
<b>3 Bestimmung der Meson-Baryon-Vertizes in Kernmaterie</b>	<b>29</b>
3.1 Berechnung der Zustandsgleichung . . . . .	29
3.1.1 Energie-Impuls-Tensor und Energiedichte . . . . .	31
3.1.2 Druck und chemisches Potential . . . . .	32
3.2 Bestimmung der Vertizes in unendlicher Kernmaterie . . . . .	33
3.3 Parametrisierung des Groningen NN-Potentials . . . . .	35
3.4 Die Impulskorrektur der DB-Vertizes . . . . .	42
3.5 Anpassung an die DB-Zustandsgleichung . . . . .	44
3.6 Zusammenfassung . . . . .	47
<b>II Exotische Kerne in der dichteabhängigen Feldtheorie</b>	<b>49</b>
<b>4 Eigenschaften endlicher Kerne</b>	<b>51</b>
4.1 Bindungsenergie und Zentralpotentiale . . . . .	51
4.2 Paarkorrelationen . . . . .	54
4.3 Numerische Realisierung . . . . .	56
<b>5 Ergebnisse für doppelt magische Kerne</b>	<b>59</b>
5.1 Zentralpotential und dichteabhängige Kopplungen . . . . .	59
5.2 Bindungsenergien und Ladungsradien . . . . .	61

5.3	Ladungsverteilungen und effektive Massen . . . . .	70
5.4	Spin-Bahn-Aufspaltung . . . . .	72
5.5	Zusammenfassung . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Ergebnisse für exotische Kerne</b>	<b>77</b>
6.1	Bindungsenergien . . . . .	78
6.2	Radien und Dichteverteilungen . . . . .	84
6.3	Vergleich mit der semiempirischen Massenformel . . . . .	90
6.4	Zusammenfassung . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Strangeness und Neutronensterne</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Dichteabhängige Y–N Feldtheorie</b>	<b>97</b>
7.1	Die Y–N Lagrangedichte . . . . .	98
7.2	Dichteabhängigkeit der Vertices . . . . .	100
7.3	Bestimmung der Hyperon–Meson–Wechselwirkung . . . . .	102
7.4	Eigenschaften von $\Lambda$ -Kernmaterie . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Die Zustandsgleichung von Neutronensternen</b>	<b>113</b>
8.1	Die Gleichgewichtsbedingungen für Neutronensternmaterie . . . . .	114
8.2	Abhängigkeit der Vertices von der Gesamtdichte . . . . .	117
8.3	Abhängigkeit der Vertices von der $SU(3)_f$ -Multiplettdichte . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Eigenschaften von Neutronensternen</b>	<b>127</b>
9.1	Die Tolman–Oppenheimer–Volkoff Gleichungen . . . . .	128
9.2	Masse–Radius Relationen . . . . .	131
9.3	Zusammenfassung . . . . .	137
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>
	<b>Anhang</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Relativistische Notation</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Dirac-Spinoren</b>	<b>151</b>
B.1	Unendliche Kernmaterie . . . . .	151
B.2	Endliche Kerne . . . . .	152
<b>C</b>	<b>Energie–Impuls–Erhaltung</b>	<b>155</b>
<b>D</b>	<b>Thermodynamische Konsistenz</b>	<b>157</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>159</b>

# Abbildungsverzeichnis

1	Die Nuklidkarte der heute bekannten ca. 2500 Atomkerne . . . . .	3
2	Schematische Dartstellung eines Atomkerns . . . . .	4
3	Darstellung der NN-Wechselwirkung durch Mesonenaustausch . . . . .	5
4	Das Oktett der Spin $\frac{1}{2}$ Baryonen . . . . .	6
1.1	Dyson-Gleichung . . . . .	15
1.2	Brückner-Selbstenergie . . . . .	15
1.3	Bethe-Goldstone-Gleichung . . . . .	15
1.4	Skalare DB-Selbstenergien $\Sigma_{p,n}^s(k_F, k_F)$ ; Groningen NN-Potential . . .	17
1.5	Vektorielle DB-Selbstenergien $\Sigma_{p,n}^0(k_F, k_F)$ ; Groningen NN-Potential . .	17
2.1	Diagrammatische Struktur des Meson-Nukleon-Vertex . . . . .	21
2.2	Rearrangement-Diagramm . . . . .	22
3.1	DB-Selbstenergien in Abhängigkeit von der zugehörigen Dichte . . . . .	37
3.2	Dichteabhängigkeit der $\sigma$ - und $\omega$ -Vertizes; Groningen NN-Potential . .	38
3.3	Dichteabhängigkeit der $\rho$ - und $\delta$ -Vertizes; Groningen NN-Potential . .	39
3.4	EoS unendlicher Kernmaterie für das Groningen NN-Potential . . . . .	41
3.5	Impulskorrigierte Dichteabhängigkeit der $\sigma$ - und $\omega$ -Vertizes . . . . .	44
3.6	Impulskorrigierte Dichteabhängigkeit des $\rho$ -Vertex . . . . .	45
5.1	Dichteabhängigkeit der effektiven Kopplungen in endlichen Kernen . . .	62
5.2	Nichtrelativistische Zentralpotentiale in endlichen Kernen . . . . .	63
5.3	Relative Fehler von $r_c$ und $E_B/A$ ; Groningen Parametrisierung . . . . .	64
5.4	Relative Fehler von $r_c$ und $E_B/A$ ; Bonn A Parametrisierung . . . . .	65
5.5	Dichteabhängigkeit der $\sigma$ - und $\omega$ -Vertizes; Bonn A NN-Potential . . . .	68
5.6	EoS symmetrischer unendlicher Kernmaterie; Bonn A NN-Potential . .	68
5.7	Isospinabhängigkeit der effektiven Masse magischen Kerne . . . . .	70
5.8	Ladungsverteilungen doppelt magischer Kerne . . . . .	71
5.9	Isoskalare Spin-Bahn-Potentiale doppelt magischer Kerne . . . . .	74
5.10	Isovektorielle Spin-Bahn-Potentiale doppelt magischer Kerne . . . . .	75
6.1	Bindungsenergien pro Nukleon der Ni-Isotope aus DDRH-Rechnungen	79
6.2	Bindungsenergien pro Nukleon der Sn-Isotope aus DDRH-Rechnungen	79
6.3	Zwei-Neutronen-Separationsenergien der die Ni- und Sn-Isotope . . . .	81
6.4	Pairing-Energien und -Gaps der Ni-Isotopenkette in BCS-Näherung . .	82
6.5	Pairing-Energien und -Gaps der Sn-Isotopenkette in BCS-Näherung . .	83

6.6	Mittlere Neutronen- und Ladungsradien der Ni-Isotope . . . . .	85
6.7	Mittlere Neutronen- und Ladungsradien der Sn-Isotope . . . . .	85
6.8	Differenz der Neutronen- und Ladungsradien . . . . .	86
6.9	Neutronen- und Ladungsdichteverteilungen der Ni-Isotope . . . . .	88
6.10	Neutronen- und Ladungsdichteverteilungen der Sn-Isotope . . . . .	89
7.1	Darstellung der YN- und YY-Wechselwirkung durch Mesonsaustausch	98
7.2	EoS von symmetrischer Kernmaterie für verschiedene $\Lambda$ -Beimischungen	109
7.3	Bindungsenergie und Sättigungsdichte in Abhängigkeit von $f_S$ . . . . .	110
7.4	Bindungsenergie reiner $\Lambda$ -Materie in Abhängigkeit von der Baryondichte	111
7.5	Verhalten der effektiven Vertizes bei hohen Dichten . . . . .	112
8.1	EoS von Neutronensternmaterie in Modell 1, nur $\Lambda$ . . . . .	118
8.2	Zusammensetzung von Neutronensternmaterie in Modell 1, nur $\Lambda$ . . . . .	119
8.3	EoS von Neutronensternmaterie in Modell 1, alle Hyperonen . . . . .	120
8.4	Zusammensetzung von Neutronensternmaterie in Modell 1, alle Hyperonen	121
8.5	Effektive Baryonenmassen in Neutronensternmaterie . . . . .	123
8.6	EoS von Neutronensternmaterie in Modell 2 . . . . .	124
8.7	Zusammensetzung von Neutronensternmaterie in Modell 2 . . . . .	125
9.1	Experimentelle Neutronensternmassen und Radienabschätzungen. . . . .	128
9.2	Einfluß des $\beta$ -Gleichgewichts auf die Masse-Radius-Relationen . . . . .	131
9.3	Massen $M$ in Abhängigkeit von $\rho_c$ und $R$ ; Groningen Parametrisierung	132
9.4	Massen $M$ in Abhängigkeit von $\rho_c$ und $R$ ; Bonn A Parametrisierung . . . . .	134
9.5	Massen $M$ in Abhängigkeit von $\rho_c$ und $R$ ; DD Parametrisierung . . . . .	136
9.6	Vergleich der Masse-Radius-Relationen verschiedener Modelle . . . . .	138

# Tabellenverzeichnis

1.1	Parameter des Ein-Boson Austauschpotentials der Groningen-Gruppe .	13
3.1	Parametrisierung der dichteabhängigen Vertizes; Groningen NN-Potential	40
3.2	Parametrisierung des impulskorrigierten $\rho$ Meson-Nukleon-Vertex . . .	45
3.3	Eigenschaften des Groningen NN-Potential in unendlicher Kernmaterie	47
5.1	Experimentelle Ladungsradien und Bindungsenergien magischer Kerne	60
5.2	Parametrisierung der dichteabhängigen Vertizes; Bonn A NN-Potential	60
5.3	$r_c$ und $E_B/A$ magischer Kerne; Groningen Parametrisierung . . . . .	67
5.4	$r_c$ und $E_B/A$ magischer Kerne; Bonn A Parametrisierung . . . . .	67
5.5	Kernmaterieeigenschaften der Bonn A und Groningen Parametrisierungen	69
5.6	Spin-Bahn-Aufspaltung $\Delta_{LS}(n, p)$ der $1p$ -Schale und $1d$ -Schale . . . . .	73
6.1	Parameter der Massenformel aus mikroskopischen Wechselwirkungen .	91
7.1	Baryonen des Spin $\frac{1}{2}$ Oktetts. . . . .	97
7.2	Skalierungsfaktoren der $\sigma$ - und $\omega$ -Hyperon-Vertizes, Modell 1 . . . . .	105
7.3	Skalierungsfaktoren der $\sigma$ - und $\omega$ -Hyperon-Vertizes, Modell 2 . . . . .	105
9.1	Maximale Massen, -radien und -dichten; Groningen Parametrisierung .	133
9.2	Maximale Massen, -radien und -dichten; Bonn A Parametrisierung . . .	135
9.3	Maximale Massen, -radien und -dichten; DD Parametrisierung . . . . .	137





# Einleitung

## Motivation

Exotische Kerne bieten die einzigartige Möglichkeit, die Eigenschaften und die Gültigkeit von Kernmodellen unter extremen Bedingungen zu untersuchen. Als exotische Kerne werden normalerweise extrem neutronen- und protonenreicher Kerne bezeichnet, aber dieser Begriff kann auch verallgemeinert werden auf alle Kerne, die sich von den natürlich vorkommenden Isotopen durch ihre besonderen Eigenschaften unterscheiden und normalerweise experimentell hergestellt werden müssen. Im erweiterten Sinne fallen deshalb auch superschwere Elemente (Protonenzahl  $Z > 107$ ) und Hyperkerne (Kerne, die Hyperonen, z. B. das  $\Lambda$ , enthalten) in diese Kategorie. Dank neuer experimenteller Techniken und moderner Beschleuniger und Detektoren ist es möglich, mit diesen Kernen umfangreiche Experimente durchzuführen. Zu erwähnen sind hier insbesondere die Forschungseinrichtungen GSI in Darmstadt, GANIL in Frankreich, RIKEN und KEK in Japan, LBNL, MSU und BNL in den USA.

Man weiß heute, dass die Elementsynthese in den Sternen über eine Kette exotischer Kerne erfolgt, die sich dann vor allem durch  $\beta$ -Zerfall in die vorhandenen stabilen Kerne umwandeln (siehe Abbildung 1). Die Bildung der chemischen Elemente und deren Häufigkeitsverteilung sind deshalb im wesentlichen durch die Eigenschaften der exotischen Kerne bestimmt. Diese erlauben es uns auch, ein breiteres Spektrum von Kerneigenschaften zu studieren als dies mit stabilen Kernen möglich ist, insbesondere das Verhalten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (NN) unter dem Gesichtspunkt geringer Dichten und extremer Isospinassymmetrie.

Eine andere Klasse von „exotischen“ Objekten sind Neutronensterne, die gleich aus mehreren Gründen sehr interessant sind. Einerseits erlauben sie die Untersuchung der NN-Wechselwirkung bei extrem hohen Dichten und Asymmetrien. Zusätzlich erwartet man, dass aufgrund der hohen Energiedichte in ihrem Innern Hyperonen ( $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ ) existieren. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser seltsamen Kernmaterie erlaubt wiederum Rückschlüsse auf die Wechselwirkungen zwischen Hyperonen und Nukleonen bzw. Hyperonen und Hyperonen. Unter Verwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie lassen sich aus der Zustandsgleichung von Kernmaterie verschiedene Eigenschaften eines Neutronensterns berechnen und die Verbindung zwischen der Astrophysik und der Kern- und Teilchenphysik herstellen. Durch den Vergleich mit experimentellen Daten für Neutronensterne, insbesondere Masse und Radius, lassen diese sich als ein „kosmisches Labor“ verwenden, in dem Bedingungen herrschen, die unter irdischen Bedingungen auf absehbare Zeit nicht erzeugt werden können.

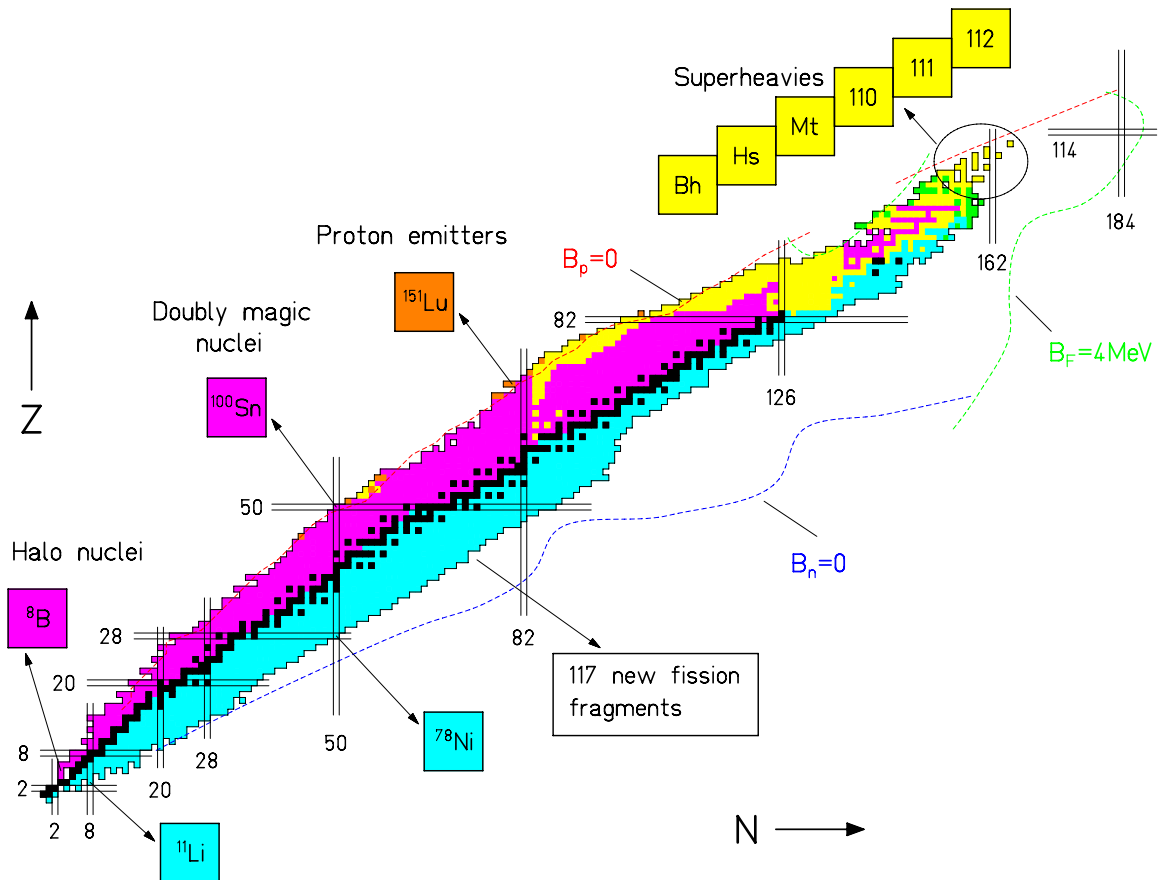
Eine der zentralen Fragestellungen der theoretischen Kernphysik ist die Aufgabe, die grundlegenden Eigenschaften nukleonischer Systeme durch eine realistische NN–Wechselwirkung zu beschreiben. Zu den untersuchten Systemen gehören in erster Linie experimentell messbare Kerne, aber auch theoretische Systeme aus unendlich vielen Nukleonen wie Kernmaterie sind von besonderem Interesse. Diese Aufgabe lässt sich in zwei unabhängige Schritte unterteilen. Als erstes wird die freie NN–Wechselwirkung parametrisiert. Dies geschieht entweder durch einen rein phänomenologischen Ansatz [1, 2] oder durch ein Mesonenaustausch–Potential (One-Boson-Exchange, OBE) [3, 4]. Die Parameter dieser Modelle werden so angepasst, dass experimentell gemessene Phasenverschiebungen aus der NN–Streuung und das Deuteron korrekt beschrieben werden. Solche Modelle werden als realistisch bezeichnet, wenn die gewichtete quadratische Abweichung pro Datenpunkt  $\chi^2$  in der Größenordnung von eins liegt.

Der zweite Schritt beinhaltet die Lösung des Vielteilchenproblems eines Systems aus  $A$  Nukleonen, die untereinander mit der parametrisierten realistischen NN–Wechselwirkung wechselwirken. Der einfachste Lösungsansatz ist die Hartree- bzw. Hartree–Fock- (HF) oder Mittelfeldnäherung, in der der Grundzustand eines Vielteilchensystems als System unkorrelierter Teilchen betrachtet wird, die sich in einem mittleren Potential bewegen, welches sich aus den gemittelten Wechselwirkungen aller Nukleonen miteinander berechnet [5]. Dieses Verfahren erlaubt die erfolgreiche Beschreibung von unendlicher Kernmaterie und von Bindungsenergien und Ladungsradien endlicher Kerne, wenn man phänomenologische NN–Wechselwirkungen benutzt, deren Parameter durch einen Fit an solche Systeme bestimmt wurden. Die ersten Rechnungen mit diesen effektiven Wechselwirkungen wurden im Rahmen von nicht-relativistischen Ansätzen [6, 7] durchgeführt.

Der moderne Zugang zur Beschreibung der Kernstruktur basiert auf einer relativistischen Feldtheorie, der Quantenhadrodynamik (QHD), in der nur Baryonen und Mesonen als die relevanten Freiheitsgrade betrachtet werden [8, 9, 10] (siehe Abbildung 2). Quarks und Gluonen als Konstituenten der Hadronen und Freiheitsgrade der Quantenchromodynamik (QCD) [11] können bei der Betrachtung der Grundzustandseigenschaften endlicher Kerne vernachlässigt werden. In ihrem Innern herrschen so niedrige Energien und Dichten, dass aufgrund des sogenannten Confinements nur farbneutrale Objekte beobachtbar sind. Die Beschreibung der NN–Wechselwirkung erfolgt dann durch den Austausch von Mesonen, ihre Reichweite wird durch die inverse Masse der Mesonen und ihre Stärke durch die Werte der effektiven Meson–Nukleon–Vertizes  $\Gamma_{\phi N}$  bestimmt (siehe Abbildung 3). Ein großer Vorteil dieser Theorie gegenüber nicht-relativistischen Modellen ist, dass sich die Spin–Bahn–Wechselwirkung der Nukleonen endlicher Kerne aus der Theorie ergibt und nicht von Hand hinzugefügt werden muss.

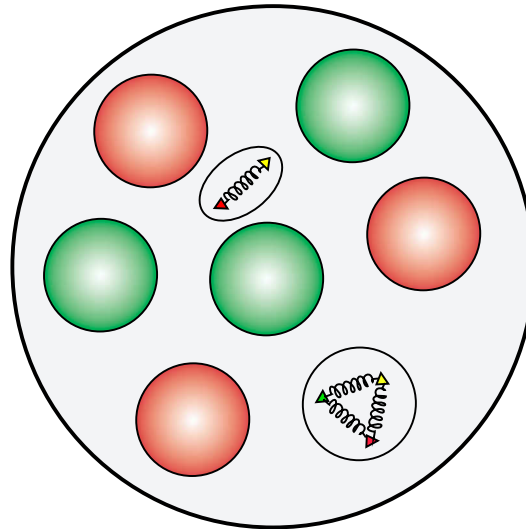
Benutzt man nun jedoch eine realistische, auf NN–Streudaten basierende Wechselwirkung, scheitert die Hartree–Näherung und man erhält teilweise sogar ungebundene Systeme [12]. Der Grund hierfür liegt in der extrem repulsiven kurzreichweitigen Komponente der freien NN–Wechselwirkung, die notwendig ist, um die experimentellen Daten zu beschreiben. Die Hartree–Wellenfunktionen sind jedoch nicht korreliert und besitzen deshalb große Amplituden für Konfigurationen, in denen zwei Nukleonen so dicht zusammen sind, dass sie die starke Repulsion spüren.

Man umgeht in der Regel dieses Problem durch die Benutzung der oben ange-



**Abb. 1:** Die Nuklidkarte der heute bekannten ca. 2500 Atomkerne, geordnet nach der Zahl ihrer Protonen( $Z$ ) und Neutronen( $N$ ). Nur die schwarz gekennzeichneten Kerne, die das sogenannte „Tal der Stabilität“ bilden, sind in der Natur stabil vorhanden. Die Linien  $B_n = 0$  und  $B_p = 0$  markieren die Grenzen der Stabilität, die Neutronen- und Protonenabbruchkanten. Die senkrechten und waagerechten Doppellinien kennzeichnen die zu den magischen Kernen führenden Schalenabschlüsse. Hervorgehoben sind einige besonders interessante exotische Kerne.

sprochenen phänomenologischen Wechselwirkungen. In der sogenannten relativistischen Mittelfeldnäherung (RMF - relativistic mean-field) der QHD werden die Meson-Nukleon-Vertizes als Konstanten angenommen (Kopplungskonstanten) und zusammen mit den Mesonenmassen durch einen Fit von Kernstrukturrechnungen an endliche Kerne bestimmt. Moderne Parametrisierungen enthalten neben dem skalaren  $\sigma$ -Meson und dem vektorialen  $\omega$ -Meson zusätzlich das isovektorielle  $\rho$ -Meson, welches zur Beschreibung asymmetrische Systeme benötigt wird, und nichtlineare  $\sigma$ - (und teilweise auch  $\omega$ -) Wechselwirkungsterme zur verbesserten Beschreibung der Oberflächeneigenschaften endlicher Kerne [13, 14, 15, 16, 17, 18]. Während die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten stabiler Kerne exzellent ist, ergeben sich für exotische Kerne teilweise starke Abweichungen. Da die Wechselwirkungen jedoch nicht auf einer realisti-

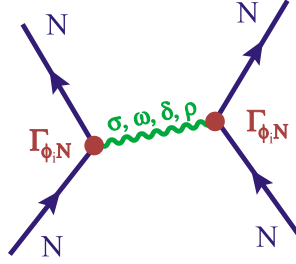


**Abb. 2:** Schematische Darstellung eines Atomkerns, die die Größe eines Nukleons im Vergleich zum typischen Abstand des räumlich nächsten Nukleons illustriert. Gezeigt wird auch die innere Struktur der Nukleonen und Mesonen, bestehend aus Quarks und Gluonen.

schen NN–Wechselwirkungen aufbauen, lassen sich aus diesem Verhalten nur schwierig Rückschlüsse auf den mikroskopischen Ursprung dieser Differenzen ziehen. Ein weiterer Kritikpunkt ist die teilweise Instabilität dieser Modelle bei hohen Dichten [19, 20], die daraus resultiert, dass die Parameter nur an den sehr begrenzten Dichtebereich angepasst wurden, der in endlichen Kernen vorkommt.

Für eine fundamentalere, mikroskopisch fundierte Beschreibung von Vielteilchensystemen ist es deshalb notwendig, ein Modell zu benutzen, das über die Mittelfeldnäherung hinaus kurzreichweitige Zweiteilchenkorrelationen berücksichtigt. In der Brückner–Theorie werden diese Korrelationen durch die Berechnung einer effektiven Wechselwirkung im Medium, die sogenannte  $G$ –Matrix, berücksichtigt, die man durch Aufsummierung aller Zweiteilchenwechselwirkungen erhält [21, 22, 23]. Nicht-relativistische Brückner-Rechnungen ergeben zufriedenstellende Ergebnisse für Kernmaterie und endliche Kerne, jedoch sind entweder die Bindungsenergien zu gering oder die Sättigungsdichten zu hoch (für endliche Kerne bedeutet dies zu kleine Radien). Die Zusammenfassung der Ergebnisse für Sättigungsdichten und Bindungsenergien ergibt die sogenannte Coester–Linie [24], die durch relativistische Korrekturen in Richtung der empirischen Ergebnisse [25] verschoben wird. Die modernere Beschreibung der Wechselwirkung im Medium basiert deshalb auf relativistischen Brueckner–Rechnungen, die realistische NN–Potentialen verwenden [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], der sogenannten Dirac–Brueckner–Hartree–Fock–Theorie (DBHF).

Im Dirac–Brückner–Modell (DB) erhält das Nukleon durch die Wechselwirkung mit dem Medium eine Selbstenergie, die sich in einen skalaren Anteil  $\Sigma_s$  und einen vektoriellen Anteil  $\Sigma_\mu$  aufspalten lässt. Das gegenseitige Aufheben dieser beiden stark attraktiven bzw. repulsiven Felder in der Größenordnung von 300 MeV ergibt Einzelteilchenenergien von ca.  $-50$  MeV, die in etwa den nicht-relativistischen Werten ent-



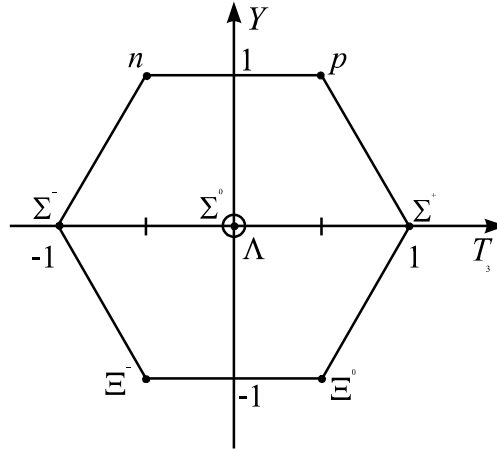
**Abb. 3:** Schematische Darstellung der NN-Wechselwirkung durch den Austausch eines Mesons zwischen zwei Nukleonen. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch die Eigenschaften der Meson-Nukleon-Vertizes  $\Gamma_{\phi_i N}$  bestimmt.

sprechen. Trotz des Erfolges in unendlicher Kernmaterie dieser bis auf den Fit an die NN-Streudaten parameterfreien Theorie sind komplette DB-Rechnungen für endliche Kerne aufgrund der komplexen Struktur des Modells numerisch nicht durchführbar.

Es ist jedoch möglich, die Eigenschaften der DB-Theorie auf endliche Kerne zu übertragen, indem man ihre Ergebnisse so parametrisiert, dass sie in einem numerisch einfacheren Modell verwendet werden können. Konkret erfolgt dies in der lokalen Dichtnäherung (LDA - local density approximation) entweder durch eine Parametrisierung der  $G$ -Matrix [33, 34] oder der einzelnen Komponenten der Selbstenergien, indem deren Mediumabhängigkeit auf effektive dichteabhängige Meson-Nukleon-Vertizes projiziert wird [35, 36]. Diese effektive Wechselwirkung wird dann in einem dichteabhängigen RMF-Modell verwendet. In [37, 38] wurde gezeigt, dass diese Projektion nur zu einer kovarianten und thermodynamisch konsistenten Theorie führt, wenn sie im Rahmen einer relativistischen, dichteabhängigen Hadronenfeldtheorie (DDRH) formuliert wird. Dies erlaubt die Beschreibung endlicher Kerne mit mikroskopischen NN-Wechselwirkungen ohne die Einführung neuer phänomenologischer Parameter. In der Literatur wurden im Rahmen dieser Theorie bisher nur einige wenige stabile Kerne untersucht [38, 39, 40, 41] und alle Arbeiten beruhen auf dem gleichen NN-Potential (Bonn A [3, 29]). Ein weiterer Punkt, der bisher nicht ausreichend untersucht wurde, ist die Dichteabhängigkeit der effektiven Wechselwirkung im Isovektorkanal. Aufgrund fehlender Ergebnisse von DB-Rechnungen in asymmetrischer Kernmaterie konnte nur die isoskalare Wechselwirkung durch dichteabhängige  $\sigma$ - und  $\omega$ -Vertizes parametrisiert werden, während im Isovektorkanal ( $\delta$ - und  $\rho$ -Mesonen) empirische, konstante Kopplungen verwendet wurden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung von asymmetrischer Kernmaterie und exotischen Objekten (exotische Kerne, seltsame Kernmaterie und Neutronensterne) im Rahmen der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie. Die Verwendung von realistischen Wechselwirkungen aus Dirac-Brückner-Rechnungen in dieser phänomenologischen Näherung gibt den Rechnungen eine fundierte mikroskopische Basis und erlaubt es, aus den Ergebnissen Rückschlüsse auf die Eigenschaften NN-Wechselwirkung zu ziehen.

Dazu wird das Modell aus [37, 38] auf eine dichteabhängige Beschreibung der isovektoriellen Wechselwirkung erweitert. Wir präsentieren eine neue dichteabhängige Para-



**Abb. 4:** Das Oktett der Spin  $\frac{1}{2}$  Baryonen, das sich in die vier Isospin-Multipletts  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  und  $\Xi$  der  $SU(3)_f$  unterteilen lässt.

metrisierung, die aus DB-Rechnungen für asymmetrische Kernmaterie abgeleitet wird [32, 42]. Wir bestimmen diese aus Selbstenergien, die aus dem Groningen NN-Potential berechnet wurden [43]. Dabei wird besonderer Wert darauf gelegt, die Zustandsgleichung der DB-Rechnungen mit unserem Modell möglichst genau zu reproduzieren. Da die Ergebnisse später für die Berechnung von exotischen Kernen und Neutronensternen verwendet werden sollen, ist es notwendig, dies sowohl für symmetrische Kernmaterie als auch für verschiedene Protonen-Neutronen-Verhältnisse und für reine Neutronenmaterie zu erreichen. Es zeigt sich, dass dies in Hartree-Näherung nur möglich ist, wenn eine Impulskorrektur der DB-Selbstenergien bzw. Kopplungsfunktionale eingeführt wird. Der Grund hierfür ist, dass die ursprüngliche Impulsabhängigkeit der DBHF-Selbstenergien in Hartree-Näherung nur im Mittel beschrieben werden kann.

Anschließend verwenden wir die Parametrisierungen des Groningen-Potentials sowie die älteren Ergebnisse für das Bonn-Potential zur Untersuchung der Eigenschaften magischer Kerne (Kerne mit abgeschlossenen Protonen- bzw. Neutronenschalen) und exotischer Kerne. Wir untersuchen den Einfluss der Isevektorwechselwirkung, wobei insbesondere das skalare Isevektormeson  $\delta$  interessante Veränderungen bei den effektiven Massen der Nukleonen und der Spin-Bahn-Wechselwirkung bewirkt. Die Verwendung impulskorrigierter Kopplungen führt zu einer entscheidenden Verbesserung der Ergebnisse im Vergleich mit experimentellen Daten. Die Analyse der dichteabhängigen isovektoriellen Wechselwirkung ist besonders in Kernen mit hoher Asymmetrie von Interesse, da sie maßgeblich die Lage der Protonen bzw. Neutronenabbruchkanten (siehe Abbildung 1) bestimmt. Wir untersuchen dies anhand der Nickel(Ni)- und Zinn(Sn)-Isotopenketten.

Einen weiteren Schwerpunkt bildet die Erweiterung des Modells auf das Baryonenoktett der  $SU(3)_f$ -Flavor-Symmetriegruppe, die in [44, 45, 46] vorgestellt wurde. Dies bedeutet, dass zusätzlich zu den Nukleonen ( $p$ ,  $n$ ) die Hyperonen  $\Lambda$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Xi^-$  und  $\Xi^0$  in den Rechnungen berücksichtigt werden (siehe Abbildung 4). Wir interessieren uns in dieser Arbeit besonders für die Eigenschaften von Kernmaterie, die diese

Hyperonen (Y) enthält. Es ist bis jetzt nicht möglich, diese im Rahmen von Dirac-Brückner-Rechnungen zu beschreiben. Dies liegt einerseits an fehlenden experimentellen Daten für realistische YN- und YY-Potentiale und andererseits daran, dass diese Rechnungen bis jetzt numerisch nicht durchführbar sind. Die Dichteabhängigkeit und die Stärke der Meson-Hyperon-Vertizes können daher nicht direkt aus DB-Rechnungen bestimmt werden. Vielmehr sind wir darauf angewiesen, diese aus der Dichteabhängigkeit der Meson-Nukleon-Vertizes und den wenigen erhältlichen experimentellen Daten für Hyperkerne zu extrahieren. Wir untersuchen verschiedene Modelle für die Dichteabhängigkeit der Vertizes, um daraus qualitative Informationen über mögliche DB-Rechnungen für seltsame Materie zu erhalten.

Die Eigenschaften der Zustandsgleichung bei hohen Dichten lassen sich anhand von Neutronensternen untersuchen. Dies erfordert die Berechnung ladungsneutraler Neutronensternmaterie im schwachen  $\beta$ -Gleichgewicht. Auch hier treten bei hohen Dichten Hyperonen auf, da Strangeness-Erhaltung wegen der schwachen Wechselwirkung nicht gegeben ist. Wir berechnen diese seltsame Materie in Hartree-Näherung unter Verwendung verschiedener dichteabhängiger Parametrisierungen und testen die Möglichkeit der Extrapolation der effektiven Kopplungen zu hohen Dichten. Interessant ist vor allem die baryonische Zusammensetzung der Zustandsgleichung, da diese entscheidend ist für die experimentell beobachtbaren Massen oder Radien von Neutronensternen. Wir untersuchen daher abschließend die Struktur von Neutronensternen durch Lösen der Einsteinschen Feldgleichungen unter Benutzung verschiedener hadronischer Zustandsgleichungen.

## Überblick

Die vorliegende Arbeit ist in drei Abschnitte unterteilt. Im ersten Teil werden die theoretischen Grundlagen gelegt und die benutzten Nukleon–Nukleon–Wechselwirkungen werden vorgestellt. In Kapitel 1 wird die Dirac–Brückner–Theorie kurz vorgestellt. Danach folgt in Kapitel 2 die Beschreibung der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie (DDRH) und die Untersuchung ihrer Eigenschaften unter besonderem Augenmerk auf asymmetrische Kernmaterie. Wir präsentieren in Kapitel 3 Ergebnisse für Selbstenergien in asymmetrischer Kernmaterie und für die Parametrisierung der mediumabhängigen Meson–Nukleon–Vertizes im isoskalaren ( $\sigma$ ,  $\omega$ ) und im isovektoriellen ( $\delta$ ,  $\rho$ ) Kanal. Die Einführung einer Impulskorrektur der Selbstenergien erlaubt schließlich die konsistente Projektion der DB–Ergebnisse auf DDRH–Theorie und die Reproduktion der DB–Bindungsenergien.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die DDRH zur Beschreibung der Eigenschaften von stabilen und exotischen Kernen verwendet. Kapitel 4 befasst sich mit den theoretischen Eigenschaften endlicher Kerne und diskutiert die numerische Realisierung von Kernstrukturrechnungen im Rahmen des relativistischen Hartree–Formalismus. In Kapitel 5 werden stabile Kerne detailliert untersucht. Besonderes Augenmerk wird auf den Einfluss der Impulskorrektur sowie des skalaren isovektoriellen  $\delta$ –Mesons gelegt. Die exotischen Kerne der Sn- und Ni–Isotopenketten werden schließlich in Kapitel 6 berechnet. Ergebnisse für Bindungsenergien, mittlere Protonen- und Neutronenradien sowie Dichteverteilungen werden diskutiert.

Eigenschaften von seltsamer Kernmaterie und Neutronensternen werden im dritten Teil der Arbeit behandelt. In Kapitel 7 wird die dichteabhängige Feldtheorie auf das  $SU(3)_f$ –Baryonenoktett erweitert. Es folgt eine detaillierte Herleitung der Dichteabhängigkeit der Hyperon–Nukleon–Wechselwirkung, die aus vorliegenden DB–Rechnungen für Kernmaterie erfolgen muss, da nicht auf eine mikroskopische YN–Wechselwirkung zurückgegriffen werden kann. Eigenschaften von  $\Lambda N$ –Materie werden diskutiert und mit Rechnungen anderer Gruppen verglichen. Kapitel 8 befasst sich mit der Beschreibung von Materie im schwachen  $\beta$ –Gleichgewicht, wie sie in Neutronensternen erwartet wird. Die Extrapolation von Dirac–Brückner–Hartree–Fock Rechnungen zu hohen Dichten wird untersucht. Wir diskutieren Eigenschaften der Zustandsgleichungen verschiedener dichteabhängiger Wechselwirkungen und präsentieren Baryonen- und Leptonen–Verteilungen. Mit diesen Ergebnissen werden schließlich in Kapitel 9 die Eigenschaften von Neutronensternen, insbesondere Masse–Radius–Relation, untersucht.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.



# Teil I

## Dirac-Brückner-Rechnungen und effektive Vertizes



# Kapitel 1

## Dirac-Brückner Theorie

Die Nukleon–Nukleon–Wechselwirkung setzt sich aus einem repulsiven, kurzreichweitigen Anteil und einem attraktiven langreichweitigen Anteil zusammen. Der attraktive Teil führt dazu, dass Kerne gebunden sind, während der repulsive Anteil für die endliche Größe der Kerne verantwortlich ist. Radien und Bindungsenergien beschreiben damit zusammen die Sättigungseigenschaften der Wechselwirkung. Mit einer gegebenen realistischen NN–Wechselwirkung die empirischen Eigenschaften endlicher Kerne zu beschreiben ist jedoch ein zu ambitioniertes Vorhaben, da diese Rechnungen extrem komplex sind. Für Kernmaterie, die als ein Kern unendlicher Größe interpretiert werden muss, ist dies jedoch im Rahmen von Brückner–Hartree–Fock–Rechnungen näherungsweise möglich. Beginnend mit der freien Zweiteilchen–Wechselwirkung zwischen Nukleonen, die an experimentelle Streudaten angepaßt ist, wird im Brückner–Modell eine effektive Wechselwirkung in Kernmaterie bestimmt, mit der es möglich ist, die Sättigungseigenschaften dieses hypothetischen Systems zu berechnen. Die Verwendung der freien Wechselwirkung führt hingegen zu einem ungebundenen System. Erst die Verwendung dynamischer Zweiteilchenkorrelationen, die in der Brückner–Theorie in der Leiternäherung berücksichtigt werden, führt zur Sättigung. Der moderne Zugang ist dabei die relativistische Brückner–Theorie (RBHF), auch Dirac–Brückner (DB, DBHF) genannt, die im Gegensatz zu nicht-relativistischen Rechnungen einen verbesserten Sättigungsmechanismus besitzt und die empirischen Werte gut beschreibt.

In der vorliegenden Arbeit wurden keine eigenen DB–Rechnungen in Kernmaterie durchgeführt, vielmehr wurde die mediumabhängige DB–Wechselwirkung, die  $G$ –Matrix, zur Berechnung von komplexeren Systemen wie endlichen Kernen und Neutronensternen verwendet. Deshalb beschränkt sich dieses Kapitel auf einen Überblick über relativistische Brückner–Rechnungen und diskutiert kurz, wie man aus experimentellen Streudaten eine effektive Wechselwirkung im Medium erhält. Eine ausführlichere Beschreibung ist z. B. in [3, 27, 28, 43] zu finden.

Erste Untersuchungen im Rahmen der DBHF–Theorie wurden von der Brooklyn–Gruppe vorgenommen [26], jedoch wurden relativistische Effekte nur bis zur ersten Ordnung Störungstheorie behandelt. Weitere Rechnungen wurden von der Groningen Gruppe [28, 43] und der Bonn Gruppe [3, 29] durchgeführt. Beide Gruppen entwickelten auch jeweils eigene NN–Potentiale. In den ersten Rechnungen beschränkte man sich allerdings wegen der Komplexität des Problems auf symmetrische Kernmaterie und die

Berechnung der  $G$ -Matrix mit Eigenwerten positiver Energie. Modernere Rechnungen erlauben allerdings auch die Berücksichtigung des vollen Dirac-Raumes [31, 42] und die Behandlung asymmetrischer Systeme [32, 47]. Die daraus resultierenden verbesserten Ergebnisse lassen ihre Anwendung auf exotische Systeme besonders attraktiv erscheinen.

## 1.1 Die relativistische NN-Wechselwirkung

Die Parameter moderner relativistischer NN-Potentiale werden durch einen Fit der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung an die gemessenen NN-Streuphasen bestimmt. Die allgemeine Zweiteilchenstrematrix, die alle Mehrfachstreuprozesse berücksichtigt, ist die Lösung der vierdimensionalen Bethe-Salpeter-Gleichung

$$\langle p|T|p' \rangle = \langle p|K|p' \rangle + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle p|K|k \rangle G_0(k) G_0(-k) \langle k|T|p' \rangle, \quad (1.1)$$

wobei  $p$  und  $p'$  die Relativimpulse der ein- bzw. ausgehenden Teilchen sind. Der Einteilchen-Nukleonen-Propagator  $G_0$  der freien Dirac-Gleichung für ein Nukleon mit Masse  $M$  ist gegeben durch

$$G_0(k) = \frac{1}{k - M + i\epsilon}. \quad (1.2)$$

$K$  ist der komplette Zweiteilchenkernel. Normalerweise wird die dreidimensionale, symmetrische Reduktion dieser Gleichung, z.B. die Thompson-Gleichung gelöst [48].  $K$  wird durch Mesonenaustauschdiagramme erster Ordnung, die Ein-Boson-Austauschpotentiale (OBE)  $V$ , genähert. Dies ist die sogenannte Leiternäherung. Man findet im Schwerpunktsystem der streuenden Teilchen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', -\mathbf{p}'|T(s)|\mathbf{p}, -\mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{p}', -\mathbf{p}'|V(s)|\mathbf{p}, -\mathbf{p} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p}', -\mathbf{p}'|V(s)|\mathbf{k}, -\mathbf{k} \rangle g(\mathbf{k}, s) \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k}|T(s)|\mathbf{p}, -\mathbf{p} \rangle, \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei  $\frac{1}{2}\sqrt{s} = p^0$  die invariante Masse und

$$g(\mathbf{k}, s) = -i \int dk_0 G_0(k) G_0(-k) \delta_1^{(+)} \delta_2^{(+)} = \Lambda^+(\mathbf{k}) \Lambda^+(-\mathbf{k}) \frac{M^2}{E_k^2} \frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{s} - E_k + i\epsilon} \quad (1.4)$$

der Zwei-Nukleonen-Propagator ist. Die alleinige Verwendung positiver Energieeigenzustände und die Massenschalenbedingung sind durch die  $\delta$ -Funktionen  $\delta_{1,2}^{(+)}$  sichergestellt. Beiträge negativer Energie zu  $G_0(k)$  werden in der Thompson-Näherung nicht berücksichtigt.  $\Lambda^+(\mathbf{k})$  ist der Projektor auf die positiven Energieeigenzustände und  $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$ .

Die Ein-Boson-Austausch Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung enthält die Beiträge der sechs Mesonen  $\sigma$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\pi$ - und  $\eta$ . Das leichte Pion beschreibt den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung, während die schweren Mesonen wie  $\omega$  und  $\rho$  den

meson $\alpha$	$\pi$	$\eta$	$\sigma$	$\omega$	$\delta$	$\rho$
$m_\alpha$ [MeV]	139	550	571	784	962	764
I, $J^p$	1,0 <sup>-</sup>	0,0 <sup>-</sup>	0,0 <sup>+</sup>	0,1 <sup>-</sup>	1,0 <sup>+</sup>	1,1 <sup>-</sup>
$g^2/4\pi$	14.16	2.0	7.4	11.7	1.67	0.43
$f/g$				0.0		5.10
$\Lambda^2$ [GeV <sup>2</sup> ]	1300	1300	1300	1300	1300	1300

**Tab. 1.1:** Parameter des Ein-Boson Austauschpotentials der Groningen–Gruppe [43] und Eigenschaften der berücksichtigten Mesonen (Isospin I, Parität  $J^p$ , Masse  $m$ , Kopplungsstärken  $g^2/4\pi$  und  $f/g$ ).

kurzreichweitigen Teil parametrisieren. Diese entsprechen physikalischen Teilchen und besitzen bekannte Massen, während zum Beispiel das  $\sigma$ -Meson ein effektives Teilchen ist, das Prozesse beschreibt, die nicht in der Leiternäherung enthalten sind, z. B. hier der korrelierte Zwei–Pionen–Austausch. Die Lagrangedichte der Wechselwirkung lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= g_\sigma \bar{\Psi} \Psi \Phi_\sigma + g_\delta \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \boldsymbol{\Phi}_\delta \\
&- ig_\pi \bar{\Psi} \frac{\gamma^5 \boldsymbol{\gamma}^\mu}{2M} \boldsymbol{\tau} \Psi (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}_\pi) - ig_\eta \bar{\Psi} \frac{\gamma^5 \boldsymbol{\gamma}^\mu}{2M} \Psi (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}_\eta) \\
&- g_\omega \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma}_\mu \Psi A^{(\omega)\mu} - if_\omega \bar{\Psi} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2M} \Psi (\partial_\mu A_\nu^{(\omega)}) \\
&- g_\rho \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma}_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi \mathbf{A}^{(\rho)\mu} - if_\rho \bar{\Psi} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2M} \boldsymbol{\tau} \Psi (\partial^\mu \mathbf{A}_\nu^{(\rho)}). \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Ein Formfaktor  $F(\mathbf{k}^2) = \Lambda^2/(\Lambda^2 + \mathbf{k}^2)$  ( $\mathbf{k}$  ist der Impuls des Mesons), der die endliche Größe des Nukleons berücksichtigt, wird an jeden Vertex multipliziert, um Beiträge von hohen Impulsen abzuschneiden und so die Vektor–Wechselwirkung zu regularisieren. Die Wahl der Meson–Nukleon–Vertizes folgt den Eigenschaften der Mesonen ( $\sigma$  und  $\delta$  skalar,  $\omega$  und  $\rho$  vektoriell), für die  $\pi$ - und  $\eta$ -Mesonen wird gewöhnlich die pseudovektorielle Kopplung benutzt. Diese wird bevorzugt gewählt, da sie die Kopplung an Eigenzustände mit negativer Energie unterdrückt. Pseudoskalare Kopplung ist auch möglich und beide Ansätze sind auf der Massenschale identisch.

Aus der Streumatrix aus Gl. (1.3) lassen sich nun die Phasenverschiebungen der NN–Streuung berechnen. Durch einen Fit an die experimentellen Daten erhält man die freien Parameter des Modells, die in Tabelle 1.1 für die Rechnungen der Groningen–Gruppe angegeben sind [28].

Durch die Leiternäherung der vollen Streumatrix wird eine unendliche Anzahl von Diagrammen weggelassen. Weiterhin werden Eigenzustände negativer Energie und Vakuum polarisationen nicht berücksichtigt. Dies führt zu einer effektiven Theorie, in der die Kopplungskonstanten als Parameter betrachtet werden, die diese Beiträge durch den Fit an experimentelle Daten implizit einschließen. Mit den so bestimmten freien NN–Potentialen kann jetzt die Wechselwirkung im Medium bestimmt werden.

## 1.2 Die relativistische NN–Wechselwirkung im Medium

Ein Nukleon, das sich in Kernmaterie bewegt, wird durch seine Wechselwirkungen mit den anderen Nukleonen beeinflusst und erhält eine nicht verschwindende Selbstenergie  $\Sigma$ . Man drückt dies durch einen mediummodifizierten Nukleonenpropagator (auf Englisch „dressed“ propagator) aus. Die Beziehung zwischen dem unkorrelierten (‘bare’)  $G^0$  und dem physikalischen (‘dressed’)  $G$  Propagator und der Selbstenergie wird durch die Dyson–Gleichung ausgedrückt:

$$G(k) = G^0(k) + G^0(k)\Sigma(k)G(k) \quad (1.6)$$

Formale Lösungen dieser Gleichung, die in Abbildung 1.1 diagrammatisch dargestellt wird, sind

$$G^0(k) = (k + M) \left[ \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E_k} \delta(k_0 - E_k) \Theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right] \quad (1.7)$$

$$G(k) = \frac{\Theta(k_0 - \epsilon(k_F))}{k - M - \Sigma(k) + i\epsilon} + \frac{\Theta(\epsilon(k_F) - k_0)}{k - M - \Sigma(k) - i\epsilon}, \quad (1.8)$$

wobei  $k_F$  der Fermiimpuls und  $\epsilon(k_F)$  die Einteilchenenergie an der Fermikante ist.

Die Selbstenergie kann in Kernmaterie unter Berücksichtigung von Translations- und Rotationsinvarianz sowie Paritätserhaltung im Schwerpunktsystem durch die folgende Lorentzstruktur beschrieben werden [49]

$$\Sigma(k) = \Sigma^s(k) - \gamma^0 \Sigma^0(k) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \Sigma^v(k) \quad (1.9)$$

Dies ist ein wichtiger Unterschied zu nicht-relativistischen Modellen. Dort ist die Selbstenergie eine skalare Größe in der Größenordnung von 50 MeV, die hier in der nicht-relativistischen Reduktion durch die Differenz  $\Sigma^0 - \Sigma^s$  zweier Felder in der Größenordnung von 300 MeV beschrieben wird. Einsetzen dieser Zerlegung in Gl. (1.8) lässt die Einführung von effektiven, mediumabhängigen Massen und Impulsen nützlich erscheinen:

$$m^*(k) = M + \Sigma^s(k), \quad k_0^* = k_0 + \Sigma^0(k), \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{k}(1 + \Sigma^v(k)) \quad (1.10)$$

Damit lässt sich die formale Lösung aus Gl. (1.8) auch als Green–Funktion der Dirac–Gleichung im Medium

$$(k_\mu \gamma^\mu - M - \Sigma) u^*(\mathbf{k}) = (k_\mu^* \gamma^\mu - m^*) u^*(\mathbf{k}) = 0 \quad (1.11)$$

schreiben. Die Dirac–Spinoren  $u^*(\mathbf{k})$  sind ebene Wellen und werden in Anhang B angegeben. Sie sind in Kernmaterie identisch mit denen der Hartree–Näherung und werden in Kapitel 3 genauer untersucht.

Die Dirac–Brückner–Selbstenergien werden in Hartree–Fock–Näherung aus der Relation

$$\Sigma(k) = -i \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G(k') \langle k, k' | T^* | k, k' \rangle_{\mathcal{A}}] \quad (1.12)$$

$$\text{====} = \text{—} + \text{—} \circ \Sigma$$

Abb. 1.1: Dyson-Gleichung zur Berechnung des Nukleon-Propagators im Medium.

$$\Sigma = \text{Hartree} + \text{Fock}$$

Abb. 1.2: Gleichung zur Berechnung der Brückner-Selbstenergie. Das erste Diagramm ist der Hartree-, das zweite der Fock-Beitrag.

$$T = \text{---} + T \text{---}$$

Abb. 1.3: Bethe-Goldstone-Gleichung zur Berechnung der In-Medium-Modifikation der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung.

bestimmt, die in Abbildung 1.2 diagrammatisch dargestellt wird.  $\langle |T^*| \rangle_{\mathcal{A}}$  ist die antisymmetrierte NN–Wechselwirkung im Medium und wird normalerweise als  $G$ –Matrix bezeichnet. Dies ist etwas missverständlich, da es sich eigentlich um die  $T$ –Matrix im Medium handelt. Diese Streumatrix wird in Analogie zur freien NN–Streuung durch eine Bethe–Salpeter–Gleichung im Medium gelöst, in dem man in Gl. (1.1) die Ersetzungen  $T \rightarrow T^*$ ,  $G_0 \rightarrow G$  und  $K \rightarrow K^*$  durchführt und dann eine dreidimensionale Reduktion in Leiternäherung wie in Gl. (1.3) berechnet.

In dieser Gleichung tauchen Mediumeffekte auf zwei Arten auf. Zum einen besitzen bei der Streuung in die intermediären Zweiteilchenzustände die Nukleonen aufgrund des Pauli–Prinzips Impulse außerhalb des Fermi–Sees ( $k > k_F$ ). Zusätzlich enthält der intermediäre Zwei–Nukleonen–Propagator  $g(\mathbf{k}, s)^*$  Selbstenergien (er ist „gedresst“), was zu einem selbstkonsistenten Problem führt. Die effektive Wechselwirkung im Medium berechnet sich damit im Schwerpunktsystem als

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | T^* | \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{k} \rangle \frac{m^{*2}}{E_k^{*2}} \frac{\bar{Q}(k, s^*)}{E_p - E_k + i\epsilon} \langle \mathbf{k} | T^* | \mathbf{p} \rangle, \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei  $\bar{Q}(k, s^*)$  der winkelmittelte Pauli–Blocking–Operator und  $s^* = 4E_p^{*2}$  ist. Diese Gleichung wird auch Bethe–Goldstone–Gleichung genannt und ist in Abbildung 1.3 diagrammatisch dargestellt. Zu beachten ist beim Berechnen der Matrixelemente, dass die Dirac–Spinoren der mediummodifizierten Dirac–Gleichung (1.11) verwendet werden müssen, was durch die effektiven Massen zu einer weiteren Dichteabhängigkeit von  $\langle |T^*| \rangle$  führt.

Die Lösung des DB-Problems und die Berechnung der  $G$ -Matrix ist sehr aufwendig, da dafür die selbstkonsistente Berechnung der Gleichungen (1.6), (1.12) und (1.13) nötig ist.

Da die Selbstenergien gewöhnlich nur schwach impulsabhängig sind, werden sie normalerweise an der Fermikante für  $k = k_F$  berechnet. Dies erscheint in erster Näherung durch die Annahme, dass die Eigenschaften eines physikalischen Systems hauptsächlich durch Teilchen in der Nähe der Fermikante bestimmt werden, gerechtfertigt. Wir werden die aus dieser Näherung resultierenden Probleme bei der Verwendung der Selbstenergien in Hartree-Näherung in Kapitel 3 genauer diskutieren. Eine weitere Näherung ist,  $\Sigma^v$  in der Definition der effektiven Masse zu absorbieren, da dieser Vektoranteil der Selbstenergie im Vergleich zu den anderen Größen klein ist. Man erhält dadurch die modifizierten Größen

$$\tilde{m}^*(k_F) = \frac{M + \Sigma^s(k_F)}{1 + \Sigma^v(k_F)}, \quad \tilde{k}_0^* = \tilde{E}^*(k_F) = \frac{k_0 + \Sigma^0(k_F)}{1 + \Sigma^v(k_F)}, \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{k}, \quad (1.14)$$

welche die Lösung des Brückner-Modells vereinfachen.

### 1.3 Berechnung der Selbstenergien

Die numerische Berechnung erfolgt am einfachsten im Schwerpunktsystem. Um die Selbstenergien zu berechnen, muss man die  $G$ -Matrix in das Ruhesystem von Kernmaterie transformieren, was durch eine Projektion auf fünf Lorentz-invariante Amplituden und Zerlegung von  $T^*$  erfolgt [27, 28, 50]

$$T^*(s^*) = \sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}(s^*) f_1^{\alpha} f_2^{\alpha}, \quad f_i^{\alpha} \in \left\{ 1, \gamma^{\mu}, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^{\mu}, \frac{\gamma^5 \not{A}}{2m^*} \right\} \quad (1.15)$$

Diese Zerlegung ist durch die Beschränkung auf positive Energieeigenzustände nicht eindeutig. So kann anstelle der pseudovektoriellen auch die pseudoskalare Amplitude  $f_i^5 = \gamma^5$  gewählt werden. Dies beeinflusst nicht die Berechnung der Gesamtenergie, hat jedoch Auswirkungen auf die Werte der einzelnen Selbstenergien. Durch Einsetzen dieser Zerlegung in Gl. (1.12) findet man

$$\Sigma(k_F, k) = \sum_{\alpha} \int_0^{k_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q^*} f_1^{\alpha} \{ \text{Tr} [(\not{A} + m^*) f_2^{\alpha}] \Gamma_D^{\alpha} - (\not{A} + m^*) f_2^{\alpha} \Gamma_X^{\alpha} \}. \quad (1.16)$$

Die direkten (D) und Austauschamplituden (X) lassen sich durch die Fierz-Transformation

$$\Gamma_A^{\alpha} = \Gamma_D^{\alpha} - \sum_{k=1}^5 F_{ki} \Gamma_X^{\alpha} \quad (1.17)$$

mit den antisymmetrisierten Amplituden (A) in Verbindung setzen, wobei  $F_{ki}$  die Matrix der Fierz-Transformation ist [51]. Damit ist es möglich, die Selbstenergien zu extrahieren, was hier jedoch nicht mehr genauer untersucht werden soll.

Der Austauschterm verursacht die Impuls- und Zustandsabhängigkeit der Selbstenergien. Dies erkennt man aus Gl. (1.16), in der die Integration über die Austauschamplitude aufgrund der Nichtlokalität nicht ausgeführt werden kann. Diese Nichtlokalität



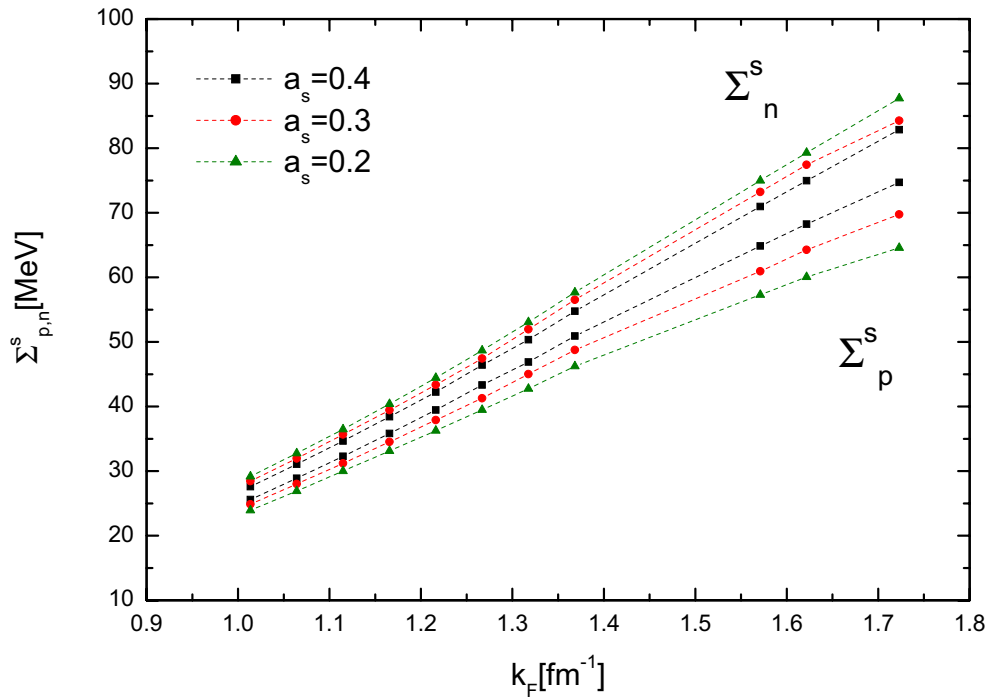


Abb. 1.4: Skalare DB-Selbstenergien  $\Sigma_{p,n}^s(k_F)$  für Protonen und Neutronen, berechnet an  $k = k_F$  für verschiedene Asymmetrien  $a_s$  mit dem Groningen NN-Potential.

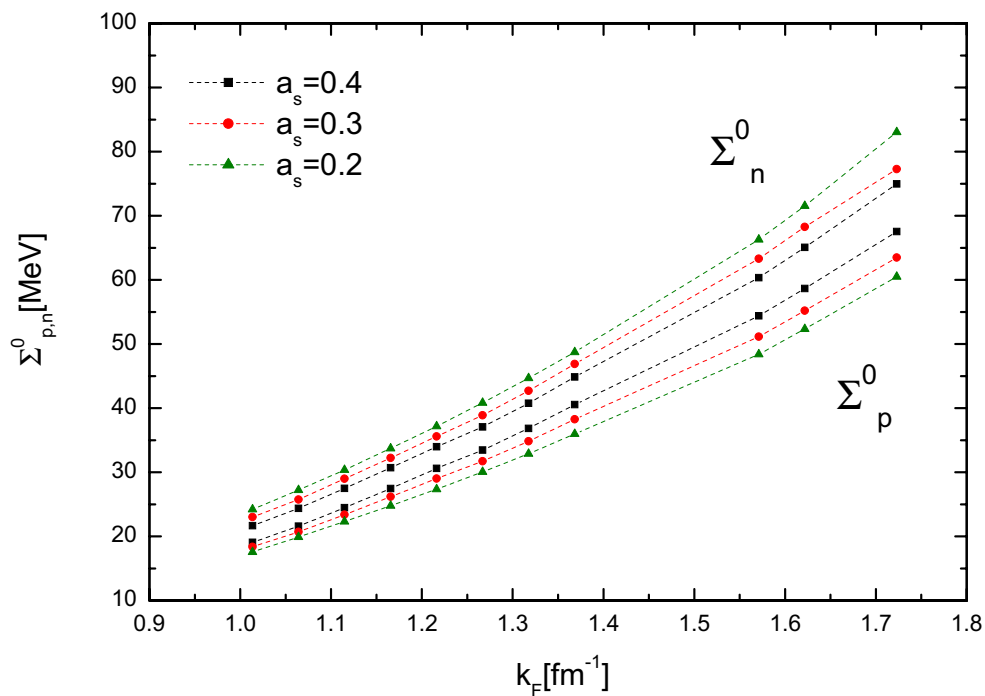


Abb. 1.5: Vektorielle DB-Selbstenergien  $\Sigma_{p,n}^0(k_F)$  für Protonen und Neutronen, berechnet an  $k = k_F$  für verschiedene Asymmetrien  $a_s$  mit dem Groningen NN-Potential.

führt zu dynamischen Fock-Beiträgen, die im Rahmen der Brückner-Theorie behandelt werden. In der Hartree-Näherung (siehe Kapitel 2) wird diese Impuls- und Zustandsabhängigkeit nur im Mittel beschrieben, wobei Rearrangementbeiträge zusätzliche statische Umordnungen im Medium berücksichtigen.

In [29] wurde eine numerisch einfachere Methode vorgeschlagen, die keine Zerlegung der  $G$ -Matrix erfordert, um die Selbstenergien zu berechnen. Die  $G$ -Matrix wird direkt im Ruhesystem ermittelt, wodurch die Lorentz-Transformation und die dadurch nötige Projektion auf die invarianten Amplituden entfällt. Allerdings müssen dann die Selbstenergiekomponenten aus dem berechneten Einteilchenpotential bestimmt werden. Dazu werden impulsunabhängige Selbstenergien  $\Sigma^s$  und  $\Sigma^0$  angenommen und in Hartree-Näherung durch einen Fit an die Einteilchenenergien bestimmt. Auch dieser Ansatz ist nicht eindeutig. Während dieses Vorgehen in symmetrischer Kernmaterie vernünftig zu sein scheint, führt es in asymmetrischer Kernmaterie bzw. Neutronenmaterie zu Problemen [52].

In asymmetrischer Kernmaterie erfolgt die Berechnung analog zu der oben besprochenen Projektion auf die invarianten Amplituden, jedoch muss jetzt beachtet werden, dass Protonen und Neutronen unterschiedliche Impulse  $k_n$  und  $k_p$  besitzen. Dies führt zu unterschiedlichen Selbstenergien für beide Nukleonen und lässt die Rechnungen erheblich aufwendiger werden. Da Protonen und Neutronen unterschiedliche effektive Massen besitzen verringert sich die Symmetrie der  $G$ -Matrix und eine sechste Lorentz-invariante Amplitude, die im symmetrischen Fall verschwinden muss, wird zur Zerlegung benötigt. Dies wird genauer in [32] diskutiert, wo DB-Rechnungen in asymmetrischer Kernmaterie mit der Groningen-Parametrisierung aus Tabelle 1.1 durchgeführt wurden. Die Ergebnisse für die skalaren Selbstenergien der Protonen und Neutronen für Rechnungen bei verschiedenen Asymmetrien  $a_s = \rho_p / (\rho_n + \rho_p)$  werden in Abbildung 1.4 gezeigt. In Abbildung 1.5 findet man die entsprechenden vektoriellen Größen. In den nächsten Kapiteln werden diese durch effektive dichteabhängige Kopplungsfunktionen parametrisiert und in relativistischen Hartree-Rechnung für endliche Kerne und Neutronensterne verwendet.

# Kapitel 2

## Dichteabhängige Hadronenfeldtheorie

Die mikroskopische Beschreibung stark wechselwirkender Vielteilchensysteme durch den virtuellen Austausch von Mesonen ist der moderne Zugang zur Kernstruktur. Während der in Kapitel 1 skizzierte Dirac–Brückner–Hartree–Fock–Ansatz die konsistente Beschreibung unendlicher Kernmaterie durch realistische NN–Potentiale erlaubt, ist dieses Verfahren jedoch numerisch so aufwendig, dass es nicht auf endliche Kerne angewendet werden kann. Man muss sich deshalb auf Modelle beschränken, die die komplizierte NN–Wechselwirkung durch einfachere Ansätze parametrisieren.

Der einfachste Ansatz ist das phänomenologische Walecka–Modell [8, 10], eine Feldtheorie, in der die NN–Wechselwirkung ursprünglich nur durch den Austausch zweier Mesonenfelder  $\sigma$  und  $\omega$  erzeugt wurde. Dabei trägt das Vektormeson (Masse  $m_\omega = 783$  MeV) dem repulsiven, kurzreichweitigen Teil der Kernkraft Rechnung während das skalare Meson  $\sigma$  (Masse  $m_\sigma = 550$  MeV) für den langreichweitigen, attraktiven Teil der NN–Wechselwirkung verantwortlich ist. Der Charakter einer phänomenologischen Beschreibung wird hier besonders deutlich, da es sich bei dem  $\sigma$ -Meson um die Parametrisierung eines korrelierten Zwei-Pionen( $2\pi$ )–Austausch handelt. Diese Mesonenfelder koppeln minimal an die massiven Spin 1/2 Dirac–Felder der Nukleonen. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch die Kopplungskonstanten  $g_\sigma$  und  $g_\omega$  bestimmt, die rein phänomenologische Werte sind und an die Sättigungseigenschaften symmetrischer Kernmaterie angepaßt wurden. Der große Erfolg dieses einfachen Modells führte, um auch endliche Kerne beschreiben zu können, zu einigen Erweiterungen. Das isovektorielle Vektormeson  $\rho$  (Masse  $m_\rho = 770$  MeV) erzeugt eine Isovektorkraft, die proportional zur Isospin–Asymmetrie des Systems ist, und das Photon ist für die Coulombrepulsion der Protonen verantwortlich. Dieses Modell wird auch allgemein als Quantenhadrodynamik (QHD) bezeichnet. Moderne Parametrisierungen verwenden zusätzliche nichtlineare Terme in den Mesonenfeldern ( $\sim c_3\sigma^3 + c_4\sigma^4$  [9],  $\sim b_4\omega^4$  [15]), deren Ursprung physikalisch nur bedingt zu begründen ist. Diese zusätzlichen Parameter müssen durch einen Fit an Kerneigenschaften bestimmt werden. Die Verwendung dieser Nichtlinearitäten ist notwendig für die Beschreibung der Oberflächeneigenschaften endliche Kerne und führt zu hervorragenden Ergebnissen. Jedoch erlaubt dieser Ansatz nur bedingt Rückschlüsse auf die mikroskopische Struktur einer realistischen NN–Wechselwirkung.

Im Gegensatz dazu, werden wir nun aufbauend auf der QHD ein erweitertes Modell entwickeln, in dem die Kopplungen der Mesonen an die Nukleonen keine phänomenologischen Werte sind, sondern eine effektive Beschreibung der NN–Wechselwirkung aus realistischen NN–Potentialen darstellen. Dies hat den Vorteil, ausgehend von Brückner-Rechnungen, eine mikroskopische NN–Wechselwirkung verwenden zu können, die jedoch in praktischen Rechnungen nicht wesentlich aufwendiger ist, als die oben angesprochenen phänomenologischen Mittelfeld–Ansätze.

## 2.1 Die erweiterte QHD Lagrangedichte

Wir starten mit einer dem QHD–Modell [8, 10] ähnlichen Lagrangedichte. Diese enthält den Dirac-Spinor  $\Psi = (\psi_p, \psi_n)^T$  der Protonen und Neutronen, die isoskalaren Mesonen  $\sigma$  und  $\omega$ , die isovektoriellen Mesonen  $\rho$  und  $\delta$  und das Photon  $\gamma$ . Das skalare Isevektormeson  $\delta$  (Masse  $m_\delta = 983$  MeV) ist in der ursprünglichen QHD–Lagrangedichte nicht enthalten. Wir berücksichtigen es hier jedoch, da es in stark asymmetrischen Systemen an Bedeutung gewinnt und bei der Bestimmung dichteabhängiger Kopplungsfunktionen aus Dirac–Brückner–Ergebnissen für asymmetrische Kernmaterie automatisch auftaucht. Da die elektromagnetische Wechselwirkung nur für die Beschreibung endlicher Kerne wichtig ist, vernachlässigen wir im folgenden das Photon in unendlicher Kernmaterie. Die verschiedenen Beiträge der Lagrangedichte  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int}$  lauten

$$\mathcal{L}_B = \bar{\Psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - M] \Psi \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma,\delta} \left( \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2 \right) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=\omega,\rho,\gamma} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\mu\nu} - m_\kappa^2 A_\mu^{(\kappa)} A^{(\kappa)\mu} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

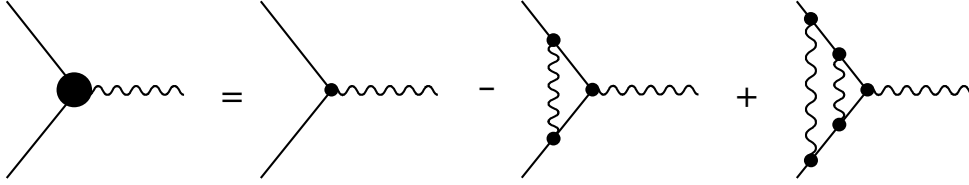
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_\sigma(\bar{\Psi}, \Psi) \Psi \Phi_\sigma - \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_\omega(\bar{\Psi}, \Psi) \gamma_\mu \Psi A^{(\omega)\mu} + \\ & \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_\delta(\bar{\Psi}, \Psi) \boldsymbol{\tau} \Psi \boldsymbol{\Phi}_\delta - \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_\rho(\bar{\Psi}, \Psi) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi \mathbf{A}^{(\rho)\mu} - \\ & e \bar{\Psi} \hat{Q} \gamma_\mu \Psi A^{(\gamma)\mu}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei  $\hat{Q} = \frac{1+\tau_3}{2}$  der elektrische Ladungsoperator und

$$F_{\mu\nu}^{(\kappa)} = \partial_\mu A_\nu^{(\kappa)} - \partial_\nu A_\mu^{(\kappa)} \quad (2.4)$$

der Feldstärke–Tensor der Vektormesonen ( $\kappa = \omega, \rho$ ) bzw. des Photons ( $\kappa = \gamma$ ) ist.

Während die freien baryonischen  $\mathcal{L}_B$  und mesonischen  $\mathcal{L}_M$  Anteile gegenüber der QHD–Lagrangedichte unverändert bleiben, enthält der Wechselwirkungsanteil  $\mathcal{L}_{int}$  anstelle der konstanten Kopplungen  $g_\alpha$ , mit  $\alpha = \sigma, \omega, \rho, \delta$ , jetzt Kopplungen  $\hat{\Gamma}_\alpha(\bar{\Psi}, \Psi)$ , die als Funktionale der Baryon–Feldoperatoren  $\bar{\Psi}$  und  $\Psi$  angesetzt werden. Diese mediummodifizierten Nukleon–Meson–Vertizes müssen Funktionale  $\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)$  von Lorentz–skalaren Bilinearformen  $\hat{\rho}_0(\bar{\Psi}, \Psi)$  sein, um die Lorentz–Invarianz der Theorie zu gewährleisten. Aus der Wahl  $\hat{\rho} \equiv 1$  folgt sofort  $\hat{\Gamma}_\alpha = const. \equiv g_\alpha$  und man erhält das Walecka–Modell als Grenzfall. Wir werden diese dichteabhängige Hadronenfeldtheorie als DDRH (density dependent relativistic hadron field theory) bezeichnen.



**Abb. 2.1:** Diagrammatische Struktur des Meson–Nukleon–Vertex in der Leiter–Näherung. Man erhält den korrelierten Vertex aus der Aufsummierung des freien Vertex durch eine Bethe–Salpeter–ähnlichen Gleichung.

Der Dichteoperator  $\hat{\rho}_0(\bar{\Psi}, \Psi)$  kann beliebige Kombinationen von Bilinearformen enthalten. Wir beschränken uns hier auf einen Ansatz mit Lorentz–Tensoren der 2. Ordnung, der entsprechend der Lorentz–Struktur der Selbstenergien in Kernmaterie in einen skalaren und einen vektoriellen Beitrag aufgespalten wird:

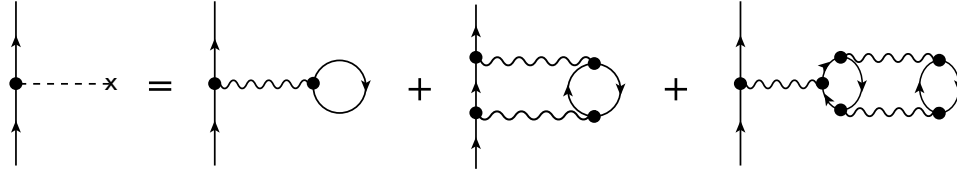
$$\hat{\rho}_0(\bar{\Psi}, \Psi) = \bar{\Psi} [A_s + B_\mu \gamma^\mu] \Psi \quad (2.5)$$

Dies stellt keine Einschränkung der Dichteabhängigkeit dar, da durch die funktionale Abhängigkeit der Vertizes  $\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)$  automatisch Terme höherer Ordnung in  $\hat{\rho}$  eingeschlossen sind. Man kann sich das am einfachsten durch eine Taylorentwicklung von  $\Gamma_\alpha(\hat{\rho}_0)$  veranschaulichen:

$$\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0) = \sum_n a_{n,\alpha} \hat{\rho}_0^n \quad (2.6)$$

Diagrammatisch entspricht dies einer Entwicklung nach N-Punkt–Funktionen mit Kontaktwechselwirkung, die mit der Stärke  $a_{n,\alpha}$  zum effektiven Vertex beitragen. Dieses Verfahren wird explizit in nicht-relativistischen Hartree–Fock–Rechnungen verwendet. So enthält die Skyrme–Wechselwirkung einen effektiven dichteabhängigen Zweiteilchenwechselwirkungsterm, der durch eine Dreiteilchen–Kontaktwechselwirkung erzeugt wird.

Eine direkte Bestimmung der  $a_{n,\alpha}$  aus Dirac–Brückner–Rechnungen soll hier nicht diskutiert werden. Diese werden vielmehr als freie Parameter angesehen, die eine effektive Beschreibung der DB–Selbstenergien ermöglichen. Dies ist gerechtfertigt, da eine Anwendung in relativistischen Hartree–Rechnungen, in denen Terme höherer Ordnung nicht explizit berücksichtigt werden, das vorrangige Ziel ist. Man kann sich die Struktur der effektiven Vertizes  $\hat{\Gamma}$  auch analog zur  $G$ –Matrix aus DB–Rechnungen veranschaulichen. In der dichteabhängigen Hadronenfeldtheorie wird die  $G$ –Matrix, die man durch Aufsummierung aller Zweiteilchenwechselwirkungen im Medium aus der freien NN–Wechselwirkung (siehe Kapitel 1) erhält, nicht direkt verwendet. Vielmehr wird diese durch die oben eingeführten dichteabhängigen Vertizes parametrisiert. Dies bedeutet diagrammatisch eine Resummation der Wechselwirkung in der Weise, dass die Leiter–Näherung effektiv auf die Vertizes verschoben wird [38]. Man erhält eine Integralgleichung analog zur Bethe–Goldstone–Gleichung für die  $G$ –Matrix, in der jetzt der in–Medium–Vertex aus dem freien Vertex und der NN  $T$ –Matrix im freien Raum berechnet wird. Dies wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht.



**Abb. 2.2:** Beitrag verschiedener Diagramme zum Mittelfeld.

Aus Gleichung (2.5) lassen sich nun sofort die zwei einfachsten Formen der Dichteabhängigkeit ableiten:

- Die Vertizes hängen nur von der baryonischen Vektorstromdichte  $\hat{j}_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$  ab. Dies entspricht der Wahl  $A_s = 0$  und  $B_\mu = \hat{u}_\mu$ , wobei  $\hat{u}_\mu$  die Struktur der Vierergeschwindigkeit mit  $\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu = 1$  besitzt. Für den Dichteoperator findet man damit  $\hat{\rho}_0^2 = \hat{j}_\mu\hat{j}^\mu$  bzw.  $\hat{\rho}_0 = \hat{j}_\mu\hat{u}^\mu$ . In Mittelfeldnäherung entspricht dies einer Abhängigkeit der Vertizes von der Baryondichte  $\rho = \langle\bar{\Psi}\gamma_0\Psi\rangle$  und wird deshalb auch als Vektordichteabhängigkeit (VDD – vector density dependence) bezeichnet.
- Die Vertizes hängen nur von der skalaren Dichte  $\hat{\rho}_s = \bar{\Psi}\Psi$  ab. Diese Wahl ist sinnvoll für die skalaren Mesonen, da in erster Ordnung die skalaren und vektoriellen Anteile der  $G$ -Matrix von der Lorentz-Struktur der zugehörigen Vertizes bestimmt werden. Diese Wahl wird als skalare Dichteabhängigkeit (SDD – scalar density dependence) bezeichnet und nur für die Vertizes  $\hat{\Gamma}_\sigma$  und  $\hat{\Gamma}_\delta$  verwendet. Für die Koeffizienten in Gleichung (2.5) bedeutet dies die Wahl  $A_s = 1$  und  $B_\mu = 0$  und man erhält  $\hat{\rho}_0 = \bar{\Psi}\Psi$ .

Die obigen Dichteabhängigkeiten sind die einzigen physikalisch sinnvollen Wahlen zur Parametrisierung von DB-Ergebnissen aus symmetrischer Kernmaterie. Betrachtet man jedoch DB-Selbstenergien, die in asymmetrischen Systemen berechnet wurden, so sind diese abhängig von der Asymmetrie des Systems und unterscheiden sich für Protonen und Neutronen. Der allgemeinste Ansatz für die Meson-Nukleon-Vertizes ist deshalb, sie neben der Gesamtdichte  $\hat{\rho}_0$ , die wie oben definiert ist, auch von der Isovektordichte  $\hat{\rho}_3$  abhängen zu lassen:  $\Gamma_\alpha(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_3)$ . Auch diese muss eine Bilinearform der Feldoperatoren sein. Wir definieren deshalb analog zu Gl. (2.5):

$$\hat{\rho}_3(\bar{\Psi}, \Psi) = \bar{\Psi}[\mathbf{C}_s\boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}_\mu\boldsymbol{\gamma}^\mu\boldsymbol{\tau}]\Psi \quad (2.7)$$

Wie die Ergebnisse aus Kapitel 1 jedoch zeigen (und in Kapitel 3 noch genauer untersucht werden wird), lassen sich die Selbstenergien in hervorragender Näherung unabhängig von der Isovektordichte parametrisieren. Wir werden daher im Folgenden  $\mathbf{C}_s = \mathbf{D}_\mu = 0$  setzen und nur die Abhängigkeit von der isoskalaren Dichte untersuchen.

## 2.2 Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der Felder erhält man durch Extremalisierung des Wirkungsintegrals  $\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0$  und den daraus resultierenden Euler-Lagrange-Gleichungen für die Feldoperatoren  $\phi_i$  [49]:

$$\partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad \phi_i = \bar{\Psi}, \Psi, \Phi_\sigma, A_\mu^{(\omega)}, \Phi_\delta, A_\mu^{(\rho)}, \mathbf{A}_\mu^{(\gamma)} \quad (2.8)$$

Die Feldgleichungen unterscheiden sich für die Mesonen von denen der QHD nur durch die Quellterme, welche die Zweiteilchenkorrelationen durch die mediumabhängigen Vertizes einschließen:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \Phi_\sigma = \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \Psi \quad (2.9)$$

$$\partial_\nu F^{(\omega)\mu\nu} + m_\omega^2 A^{(\omega)\mu} = \hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.10)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\delta^2) \Phi_\delta = \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \quad (2.11)$$

$$\partial_\nu \mathbf{F}^{(\rho)\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{A}^{(\rho)\mu} = \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \gamma^\mu \Psi \quad (2.12)$$

$$\partial_\nu F^{(\gamma)\mu\nu} = e \bar{\Psi} \hat{Q} \gamma^\mu \Psi \quad (2.13)$$

Der wesentliche Unterschied zu Rechnungen mit konstanten Kopplungen tritt in den Baryonenfeldgleichungen auf. Aus Gl. (2.3) ist es offensichtlich, dass die Variationsableitung von  $\mathcal{L}_{int}$  bezüglich  $\bar{\Psi}$  sich auch auf die Vertizes  $\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)$  auswirkt, und folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \bar{\Psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \bar{\Psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}_0} \frac{\delta \hat{\rho}_0}{\delta \bar{\Psi}} \quad (2.14)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung ist der sogenannte Rearrangementbeitrag zur Selbstenergie. Physikalisch können diese Rearrangementenergien als dynamische Umordnung des nuklearen Mediums aufgrund von Polarisierungseffekten verstanden werden, die bestimmte Klassen von Teilchen–Loch–Diagrammen wegheben. Diese Effekte treten auch in nicht-relativistischen dichteabhängigen Modellen auf (z.B. Skyrme–Wechselwirkung) und sind ausführlich in [53] diskutiert. Abbildung 2.2 zeigt verschiedene Rearrangement–Beiträge zum Mittelfeld.

Mit der Definition des Dichteoperators  $\hat{\rho}_0$  aus Gl. (2.5) berechnet sich die Ableitung als

$$\frac{\delta \hat{\rho}_0}{\delta \bar{\Psi}} = \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial \bar{\Psi}} = [A_s + B_\mu \gamma^\mu] \Psi \quad (2.15)$$

und mit der Definition

$$S^{(r)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}_0} = \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_\sigma}{\partial \hat{\rho}} \Phi_\sigma \bar{\Psi} \Psi + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\delta}{\partial \hat{\rho}} \Phi_\delta \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi - \frac{\partial \hat{\Gamma}_\omega}{\partial \hat{\rho}} A^{(\omega)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi - \frac{\partial \hat{\Gamma}_\rho}{\partial \hat{\rho}} \mathbf{A}^{(\rho)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \boldsymbol{\tau} \Psi \right) \quad (2.16)$$

lassen sich die skalaren und vektoriellen Rearrangementbeiträge in kompakter Schreibweise angeben:

$$\hat{\Sigma}^{s(r)} = S^{(r)} A_s, \quad \hat{\Sigma}^{\mu(r)} = -S^{(r)} B^\mu \quad (2.17)$$

Die normalen Selbstenergien, die man aus dem ersten Teil der Variation in Gl. (2.14) erhält haben die Standardform [8, 10] und lassen sich in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil zerlegen. Man findet

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{s(0)} &= \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}) \Phi_\sigma + \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}) \boldsymbol{\tau} \Phi_\delta \\ &= \hat{\Sigma}_0^{s(0)} + \boldsymbol{\tau} \hat{\Sigma}_3^{s(0)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^{\mu(0)} &= \hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho})A^{(\omega)\mu} + \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho})\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}^{(\rho)\mu} + e\hat{Q}A^{(\gamma)\mu} \\ &= \hat{\Sigma}_0^{\mu(0)} + \boldsymbol{\tau}\hat{\Sigma}_3^{\mu(0)}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Definieren wir nun die Gesamtselbstenergien

$$\hat{\Sigma}^s = \hat{\Sigma}^{s(0)} + \hat{\Sigma}^{s(r)}, \quad \hat{\Sigma}^\mu = \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \quad (2.20)$$

lässt sich die Dirac-Gleichung für die Baryonenfelder als

$$\left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - \hat{\Sigma}^\mu \right) - \left( M - \hat{\Sigma}^s \right) \right] \Psi = 0 \quad (2.21)$$

schreiben. Diese gleicht in ihrem Aufbau derjenigen von nicht dichteabhängigen Theorien. Der entscheidende Unterschied ist jedoch, dass die zusätzlichen Rearrangement-selbstenergien auftauchen. Ein weiterer Unterschied zum Standardmodell ist der Beitrag des skalaren Isovektormesons zur skalaren Selbstenergie. Dies führt zu unterschiedlichen effektiven Massen  $M^* = M - \hat{\Sigma}^s$  der Protonen und Neutronen im Medium und wird im Rahmen der Hartree-Näherung genauer diskutiert.

In Analogie zur DB-Brückner-Theorie definiert sich die gesamte Selbstenergie eines Nukleons als

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma} &= \hat{\Sigma}^s + \gamma_\mu \hat{\Sigma}^\mu \\ &= \left( \hat{\Sigma}^{s(0)} + \hat{\Sigma}^{s(r)} \right) + \gamma_\mu \left( \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \right) \\ &= \left( \hat{\Sigma}_0^{s(0)} + \hat{\Sigma}^{s(r)} \right) + \gamma_\mu \left( \hat{\Sigma}_0^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \right) + \boldsymbol{\tau} \left( \hat{\Sigma}_3^{s(0)} + \gamma_\mu \hat{\Sigma}_3^{\mu(0)} \right) \\ &\equiv \hat{\Sigma}_0^s + \boldsymbol{\tau}\hat{\Sigma}_3^s + \gamma_\mu \left( \hat{\Sigma}_0^\mu + \boldsymbol{\tau}\hat{\Sigma}_3^\mu \right).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Diese entspricht von ihrer Lorentz-Struktur genau der DB-Selbstenergie in asymmetrischer Kernmaterie, sie enthält jedoch zusätzlich Rearrangement-Terme in  $\hat{\Sigma}_0^s$  und  $\hat{\Sigma}_0^\mu$ , die in den DB-Selbstenergien nicht vorhanden sind.

Eine konsistente Behandlung der Dichteabhängigkeit im Rahmen einer feldtheoretischen Formulierung führt automatisch zum Auftreten von Rearrangementbeiträgen. Ohne sie sind Lorentz-Invarianz, thermodynamische Konsistenz und Energie-Impuls-Erhaltung der Theorie nicht gewährleistet. Dies wird ausführlich im Anhang dieser Arbeit gezeigt. Zusätzlich führt die Berücksichtigung der Rearrangementenergien zu einer Verbesserung der Ergebnisse bei der Berechnung endlicher Kerne, da dadurch unter anderem die Einteilcheneigenschaften der Nukleonen (z.B. Einteilchenenergien, Ladungsverteilungen) relativ unabhängig von den globalen Eigenschaften der Kerne (Bindungsenergie) verändert werden [38]. So ist es möglich, Ladungsradien und Bindungsenergien simultan zu verbessern und sich der „experimentellen“ Coester-Linie [24] weiter zu nähern.

Wir untersuchen nun die analytische Form der Rearrangement-selbstenergien für die verschiedenen Wahlen der Dichteabhängigkeit (VDD oder SDD) genauer. Wie schon gezeigt gilt im Falle der VDD-Dichteabhängigkeit für alle Mesonen  $A_s = 0$  und  $B_\mu =$



$\hat{u}_\mu$ . In diesem Fall tragen alle Mesonen zur Vektorrearrangementenergie bei und nur das Vektorpotential wird modifiziert:

$$\hat{\Sigma}^{s(r)} = 0 \quad (2.24)$$

$$\hat{\Sigma}^{\mu(r)} = \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_\omega}{\partial \hat{\rho}} A^{(\omega)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\rho}{\partial \hat{\rho}} \mathbf{A}^{(\rho)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \boldsymbol{\tau} \Psi - \frac{\partial \hat{\Gamma}_\sigma}{\partial \hat{\rho}} \Phi_\sigma \bar{\Psi} \Psi - \frac{\partial \hat{\Gamma}_\delta}{\partial \hat{\rho}} \boldsymbol{\Phi}_\delta \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \right) \hat{u}^\mu \quad (2.25)$$

Im Falle der SDD–Dichteabhängigkeit hängen die Kopplungen der skalaren Mesonen von der skalaren Dichte und die der Vektormesonen von der Vektordichte ab. Dadurch ergeben sich sowohl skalare als auch vektorielle Selbstenergien:

$$\hat{\Sigma}^{s(r)} = \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_\sigma}{\partial \hat{\rho}} \Phi_\sigma \bar{\Psi} \Psi - \frac{\partial \hat{\Gamma}_\delta}{\partial \hat{\rho}} \boldsymbol{\Phi}_\delta \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \right) \quad (2.26)$$

$$\hat{\Sigma}^{\mu(r)} = \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_\omega}{\partial \hat{\rho}} A^{(\omega)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\rho}{\partial \hat{\rho}} \mathbf{A}^{(\rho)\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \boldsymbol{\tau} \Psi \right) \hat{u}^\mu. \quad (2.27)$$

Dies führt insbesondere zu einer dynamischen Modifikation der effektiven Baryonmassen  $M^*$  durch  $\hat{\Sigma}^{s(r)}$ . Wie man sich leicht überlegen kann, führen SDD und VDD durch die unterschiedlichen Modifikationen der Baryonenfeldgleichungen und damit der Einteilcheneigenschaften auch zu unterschiedlichen Ergebnissen in endlichen Kernen. Rechnungen haben gezeigt, dass die VDD–Dichteabhängigkeit zu einer besseren Beschreibung experimenteller Daten führt [38]. Da zusätzlich die Parametrisierung der Dirac–Brückner–Rechnungen als Funktionen des Fermi–Impulses bzw. der Baryondichte erfolgt, werden wir von nun an nur noch die VDD–Beschreibung verwenden. Dies erlaubt eine wesentlich transparentere Diskussion der Ergebnisse.

## 2.3 Mittelfeld- oder Hartree–Näherung

Die Feldgleichungen für die verschiedenen Mesonen und das Photon (2.9)–(2.13) und die Baryonenfeldgleichung (2.21) sind hochgradig nichtlinear und eine exakte selbstkonsistente Lösung ist nicht möglich. Insbesondere die Quellterme der Mesonenfelder und die Selbstenergien hängen in nichttrivialer Weise von Bilinearformen der Baryonenfeldoperatoren ab. Auch physikalisch ist eine komplette feldtheoretische Behandlung nicht sinnvoll, da dies eine weitaus größere Klasse von Diagrammen einschließen würde als die Dirac–Brückner–Theorie, die wir als Ausgangspunkt für unsere Rechnungen verwenden. In der gleichen Näherung wie der DB–Theorie zu rechnen würde bedeuten, die Vertizes direkt aus der  $G$ –Matrix zu parametrisieren und so Zweiteilchenkorrelationen explizit zu berücksichtigen [30, 33]. Eine Parametrisierung der  $G$ –Matrix durch dichteabhängige Vertizes entspricht hingegen jedoch der Hartree–(Fock)–Näherung, in der sich die Baryonen unkorreliert in einem mittleren Feld bewegen und die Zweiteilchenkorrelationen implizit in der Wechselwirkung eingeschlossen sind. Prinzipiell sollte die Hartree–Fock–Näherung verwendet werden, da ihre Lagrangedichte derjenigen der DB–Theorie sehr ähnlich ist. Der Hartree–Fock(HF)–Grundzustand ist ein

antisymmetrisiertes Produkt von unkorrelierten Einteilchenwellenfunktionen, die sogenannte Slaterdeterminante, bezüglich dem die Fermionenoperatoren normalgeordnet sind [54]. Die Wechselwirkung wird durch einen lokalen direkten und einen nichtlokalen Austauschterm beschrieben und entspricht damit bis auf die Vernachlässigung des intermediären Zweiteilchenpropagators von der Struktur der Brückner-Näherung [10]. Die HF-Näherung ist jedoch für endliche Systeme immer noch sehr aufwendig, da sie aufgrund der Nichtlokalität zu einem gekoppelten System von Integrodifferentialgleichungen führt. Der gewöhnliche Ansatz ist daher, auch den Austauschterm zu vernachlässigen und nur den direkten Term der Wechselwirkung zu verwenden. Dies ist die sogenannte Hartree-Näherung, die im folgenden näher erläutert wird. Es ist klar, dass die Wechselwirkungen in Hartree-, HF- und Brückner-Näherung aufgrund ihrer unterschiedlichen Struktur nicht identisch sein können. Deshalb müssen die dichteabhängigen Kopplungskonstanten immer als effektive Parametrisierung einer mikroskopischen Theorie verstanden werden. Im Vergleich zur Brückner-Theorie tragen pseudoskalare oder -vektorielle Mesonen ( $\pi$  und  $\eta$ ), die in den Ein-Boson-Austauschpotentialen enthalten sind, nicht zum Hartree-Grundzustand bei. Diese sind jedoch aufgrund einer Fierz-Transformation [51], mit der sich der Austauschterm durch den direkten Term ausdrücken lässt, in den dichteabhängigen effektiven Kopplungen enthalten. Dies ist bei phänomenologischen konstanten Kopplungen nicht der Fall.

Die Verwendung der dichteabhängigen Kopplungskonstanten und der Hartree-Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn die lokale Dichtenäherung (LDA – local density approximation) gültig ist, sich die Dichten in dem betrachteten System in Bezug auf dessen Gleichgewichtskonfiguration also nur wenig ändern. Dies ist insbesondere gegeben, wenn die Quantenfluktuationen klein sind. Da mit wachsenden Baryonendichten auch die Stärke der Quellterme in den Mesonenfeldgleichungen zunimmt, sind diese hauptsächlich durch ihren Erwartungswert bestimmt, so dass auch die Quantenfluktuationen der Mesonenfelder klein gegenüber ihren Mittelwerten werden. Man kann daher die Baryonendichten und die Mesonenfeldoperatoren durch ihren stationären Erwartungswert bezüglich des Hartree-Grundzustandes beschreiben.

Weitere Eigenschaften der Hartree-Näherung sind, dass in den hier betrachteten statischen Systemen keine Retardierungseffekte auftreten und die Felder keine Zeitabhängigkeit besitzen. Aufgrund von Ladungs- und Paritätserhaltung verschwinden außerdem die Erwartungswerte geladener und pseudoskalarer Mesonen. Zusätzlich liefern auch die Raumanteile der Vektormesonen in sphärisch symmetrischen Systemen (unendliche Kernmaterie und Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl) keinen Beitrag zum Grundzustand. Zusammenfassend kann man damit die folgenden Näherungen für die Baryonendichten

$$\bar{\Psi}\Psi \rightarrow \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = \rho_n^s + \rho_p^s = \rho^s \quad (2.28)$$

$$\bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\Psi \rightarrow \langle \bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\Psi \rangle \delta_{i3} = \langle \bar{\Psi}\tau_3\Psi \rangle = \rho_n^s - \rho_p^s = \rho_3^s \quad (2.29)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rangle \delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\Psi \rangle = \rho_n + \rho_p = \rho \quad (2.30)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \rightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \rangle \delta_{i3}\delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\tau_3\Psi \rangle = \rho_n - \rho_p = \rho_3 \quad (2.31)$$

und die Mesonenfelder

$$\Phi_\sigma \rightarrow \langle \Phi_\sigma \rangle = \phi_\sigma \quad (2.32)$$

$$\Phi_\delta \rightarrow \langle \Phi_\delta \rangle \delta_{i3} = \phi_\delta \quad (2.33)$$

$$A_\mu^{(\omega)} \rightarrow \langle A_\mu^{(\omega)} \rangle \delta_{\mu 0} = A_0^{(\omega)} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{A}_\mu^{(\rho)} \rightarrow \langle \mathbf{A}_\mu^{(\rho)} \rangle \delta_{i3} \delta_{\mu 0} = A_0^{(\rho)} \quad (2.35)$$

annehmen. Wir werden von jetzt an den Index  $b = n, p$  zur Unterscheidung von Neutronen und Protonen verwenden, da es in asymmetrischen Systemen vorteilhaft ist, die Gleichungen isospin-separiert, also getrennt fuer die Baryonenfeldoperatoren  $\psi_n$  und  $\psi_p$  anstelle des Isospinpletts  $\Psi$ , zu formulieren.

Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Meson-Baryon-Vertizes, die als Funktionale des Dichteoperators  $\hat{\rho}_0$  definiert wurden, in der Hartree-Näherung verhalten. Mit Hilfe des Wick'schen Theorems [55] kann man diesen durch Normalordnung in einen reinen Zahlenwert  $\rho_0 = \langle \hat{\rho}_0 \rangle$  und einen operatorwertigen Anteil  $C(\hat{\rho}_0)$  zerlegen, dessen Grunzustanderwartungswert  $\langle C \rangle = 0$  verschwindet:

$$\hat{\rho}_0 = \rho_0 + C(\hat{\rho}_0) \quad (2.36)$$

Daraus folgt sofort  $\langle \hat{\rho}_0^n \rangle = \rho_0^n$  für beliebige Potenzen  $n$  und aus der Taylorentwicklung der Vertizes  $\hat{\Gamma}_\alpha$  um  $\rho_0$

$$\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0) = \Gamma_\alpha(\rho_0) + (\hat{\rho}_0 - \rho_0) \frac{\partial \hat{\Gamma}_\alpha}{\partial \hat{\rho}_0} \Big|_{\rho_0} + O(\hat{\rho}_0^2) \quad (2.37)$$

findet man durch Bildung des Erwartungswertes, dass in Hartree-Näherung die Vertex-Funktionale durch Funktionen des Erwartungswertes von  $\hat{\rho}_0$  ersetzt werden können, also zahlenwertige Funktionen der Baryonendichten sind:

$$\langle \hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0) \rangle = \Gamma_\alpha(\langle \hat{\rho}_0 \rangle) = \Gamma_\alpha(\rho_0) \quad (2.38)$$

Analog bestimmt man die Ableitungen der Funktionale

$$\left\langle \frac{\partial \hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} \right\rangle = \frac{\partial \Gamma_\alpha(\rho_0)}{\partial \rho_0}, \quad (2.39)$$

was die nichtlinearen Bewegungsgleichungen erheblich vereinfacht. Hartree-Approximation bedeutet demnach, die folgenden Korrelationsterme zu vernachlässigen:

$$C_\alpha = \langle (\hat{\Gamma}_\alpha - \langle \hat{\Gamma}_\alpha \rangle) (\hat{\rho}_0 - \langle \hat{\rho}_0 \rangle) \rangle \quad (2.40)$$

Die Mesonenfeldgleichungen reduzieren sich damit zu einfachen Differentialgleichungen für klassische Felder

$$(-\nabla^2 + m_\sigma^2) \phi_\sigma = \Gamma_\sigma(\rho) \rho^s \quad (2.41)$$

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2) A_0^{(\omega)} = \Gamma_\omega(\rho) \rho \quad (2.42)$$

$$(-\nabla^2 + m_\delta^2) \phi_\delta = \Gamma_\delta(\rho) \rho^s \quad (2.43)$$

$$(-\nabla^2 + m_\rho^2) A_0^{(\rho)} = \Gamma_\rho(\rho) \rho_3 \quad (2.44)$$

$$-\nabla^2 A_0^{(\gamma)} = -e \rho_p, \quad (2.45)$$

die durch Greensche Funktionen  $D_\alpha$ , die den freien Mesonenpropagatoren entsprechen, gelöst werden [10]. Dies soll hier nicht genauer erläutert werden. Entscheidend ist nur, dass im Gegensatz zu Modellen mit konstanten Kopplungen über die Vertizes integriert werden muss, um die Dichteabhängigkeit konsistent zu behandeln. Schematisch ergibt sich für die Lösung obiger Gleichungen damit

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}) = \int d^3r' D_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Gamma_\alpha(\rho_0(\mathbf{r}')) \rho_\alpha(\mathbf{r}'). \quad (2.46)$$

In den Selbstenergien werden in Hartree-Näherung Mesonenfelder, Baryonendichten und Kopplungsfunktionale durch ihre Erwartungswerte ersetzt, in der Vektor-Rearrangementenergie erhält man z.B.  $\hat{j}^\mu A_\mu^{(\omega)} = \rho A_0^{(\omega)}$ . Im Ruhesystem ist die Vierergeschwindigkeit  $\hat{u}^\mu = (1, \mathbf{0})$  und man kann die Vektorselbstenergien als  $\Sigma_b^0 = \Sigma_b^\mu \hat{u}^\mu$  definieren. Die Dirac-Gleichung ist damit die einzige Bewegungsgleichung, die in ihrer Struktur unverändert bleibt und ihren Quantencharakter beibehält:

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma_b^\mu(\rho)) - (M - \Sigma_b^s(\rho))] \psi_b = 0, \quad (2.47)$$

Sie enthält jetzt jedoch die statischen, dichteabhängigen Selbstenergien

$$\Sigma_b^{s(0)}(\rho) = \Gamma_\sigma(\rho) \phi_\sigma + \tau_b \Gamma_\delta(\rho) \phi_\delta \quad (2.48)$$

$$\Sigma_b^{0(0)}(\rho) = \Gamma_\omega(\rho) A_0^{(\omega)} + \tau_b \Gamma_\rho(\rho) A_0^{(\rho)} + e \frac{1 - \tau_b}{2} A_0^{(\gamma)} \quad (2.49)$$

$$\Sigma^{0(r)}(\rho) = \left( \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \rho} A_0^{(\omega)} \rho + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \rho} A_0^{(\rho)} \rho_3 - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \rho} \phi_\sigma \rho^s - \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial \rho} \phi_\delta \rho_3^s \right), \quad (2.50)$$

die sich für Neutronen ( $\tau_n = +1$ ) und Protonen ( $\tau_p = -1$ ) unterscheiden. Die Rearrangementselbstenergien sind jedoch aufgrund der Dichteabhängigkeit der Vertizes von der Gesamtdichte unabhängig vom Isospin.

In den nächsten Kapiteln werden wir nun die Eigenschaften verschiedener Systeme (asymmetrische Kernmaterie, exotische Kerne, Neutronensterne) im Rahmen der vorgestellten dichteabhängigen relativistischen Hartree-Näherung untersuchen.

# Kapitel 3

## Bestimmung der Meson-Baryon-Vertizes in Kernmaterie

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich die Ergebnisse aus den Dirac-Brückner-Rechnungen aus Kapitel 1 in der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie (DDRH) verwenden lassen, die in Kapitel 2 vorgestellt wurde. Dazu wird in Analogie zur DB-Theorie unendliche Kernmaterie in Hartree-Näherung beschrieben und diskutiert, wie eine konsistente Projektion der DB-Selbstenergien auf die dichteabhängigen Meson-Nukleon-Vertizes zu erfolgen hat.

### 3.1 Berechnung der Zustandsgleichung

Die Feldgleichungen aus Kapitel 2 werden als erstes in unendlicher Kernmaterie ausgewertet. Da es sich bei dieser um ein homogenes, isotropes System handelt, verschwinden die Ableitungsterme bezüglich der Ortskoordinaten in den Feldgleichungen. Damit lässt sich die Lösung der Dirac-Gleichung (2.21) analog zur freien Dirac-Gleichung durch eine Fourier-Entwicklung im Impulsraum nach ebenen Wellen darstellen [56, 57]. Dies wird in Anhang B genauer erläutert. Wir betrachten in Hartree-Näherung nur Einteilchenzustände positiver Energie, die wir im Medium als  $u_b^*(k, s)$  bezeichnen. Dabei unterscheidet der Index  $b = p, n$  den Isospin und  $s = \pm\frac{1}{2}$  den Spin der Neutronen und Protonen. Die Dirac-Gleichung lautet dann:

$$[\gamma_\mu k_b^{*\mu} - m_b^*] u_b^*(k, s) = 0 \quad (3.1)$$

Wir haben dabei die mediumabhängigen effektiven Vierer-Impulse  $k_b^{*\mu} = k^\mu - \Sigma_b^\mu$  (mit  $k_b^{*0} = \epsilon_b - \Sigma_b^0$ ) und effektiven Massen  $m_b^* = M - \Sigma_b^s$  definiert, die der modifizierten Massenschalenbedingung

$$k_b^{*2} - m_b^{*2} = 0 \quad (3.2)$$

genügen. Durch die Berücksichtigung des  $\delta$ -Mesons unterscheiden sich die effektiven Massen für Protonen und Neutronen. Für die Einteilchenenergien  $E_b^*$  ergibt sich damit

$$E_b^* = (k_b^{*0}) = \sqrt{\mathbf{k}_b^{*2} + m_b^{*2}} \quad (3.3)$$

und Lösung der Dirac-Gleichung ist

$$u_b^*(k, s) = \sqrt{\frac{E_b^* + m_b^*}{2m_b^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}_b^*}{E_b^* + m_b^*} \end{pmatrix} \chi_s. \quad (3.4)$$

Auch die Mesonenfeldgleichungen (2.41)-(2.44) vereinfachen sich in unendlicher Kernmaterie, da aufgrund der Translationsinvarianz die Ableitungen der Mesonenfelder verschwinden:

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = \Gamma_\sigma(\rho) \rho^s \quad (3.5)$$

$$m_\omega^2 A_0^{(\omega)} = \Gamma_\omega(\rho) \rho \quad (3.6)$$

$$m_\delta^2 \phi_\delta = \Gamma_\delta(\rho) \rho_3^s \quad (3.7)$$

$$m_\rho^2 A_0^{(\rho)} = \Gamma_\rho(\rho) \rho_3 \quad (3.8)$$

Die Berechnung der in Kapitel 2 definierten Baryondichten und skalaren Dichten erfolgt durch Integration über alle Zustände  $k \leq k_{F_b}$  innerhalb der Fermikugel. Mit der Definition  $E_{F_b} = \sqrt{k_{F_b}^2 + m_b^{*2}}$  lassen sich diese sofort angeben:

$$\begin{aligned} \rho &= \langle \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi \rangle = \sum_{b=p,n} \sum_{ss'} \int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \bar{u}_b^*(k, s') u_b^*(k, s) \\ &= \sum_{b=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k = \sum_{b=p,n} \frac{k_{F_b}^3}{3\pi^2} \\ &\equiv \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \rho^s &= \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \sum_{b=p,n} \sum_{ss'} \int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} u_b^{*\dagger}(k, s') u_b^*(k, s) \\ &= \sum_{b=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k \frac{m_b^*}{E_b^*} \\ &= \sum_{b=p,n} \frac{m_b^*}{2\pi^2} \left[ k_{F_b} E_{F_b} - m_b^{*2} \ln \frac{k_{F_b} + E_{F_b}}{m_b^*} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Lösung des Kernmaterieproblems bei einem gegebenen Fermiimpuls  $k_{F_b}$  bzw. einer Baryondichte  $\rho_b$  erfordert die Kenntnis der effektiven Massen, um aus diesen die skalaren Dichten über Gl. (3.10) berechnen zu können. Danach ist es möglich, aus Gl. (3.5)-(3.8) die Mesonenfelder zu bestimmen. Es ist jedoch zu beachten, dass

$$m_b^* = M - \Gamma_\sigma(\rho) \phi_\sigma - \tau_b \Gamma_\delta(\rho) \phi_\delta \quad (3.11)$$

über die skalaren Selbstenergien auch von den Mesonenfeldern und damit wieder implizit von den skalaren Dichten abhängt. Dieses Selbstkonsistenzproblem führt zu einem gekoppelten Gleichungssystem für die effektiven Massen  $m_b^*$ . Wir lösen es, indem die Felder  $\phi_\sigma$  und  $\phi_\delta$  aus ihren Feldgleichungen unter Verwendung von Gl. (3.10) und Gl. (3.11) bestimmt werden. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es leicht auf Systeme mit einer beliebigen Anzahl von Baryonensorten (Nukleonen und Hyperonen) verallgemeinert werden kann.

Wir geben als nächstes die zur Beschreibung unendlicher Kernmaterie benötigten Größen an.

### 3.1.1 Energie–Impuls–Tensor und Energiedichte

Der Energie–Impuls–Tensor ist definiert als

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \phi_i = \bar{\Psi}, \Psi, \Phi_\sigma, A_\mu^{(\omega)}, \Phi_\delta, A_\mu^{(\rho)} \quad (3.12)$$

und berechnet sich mit der DDRH–Lagrangedichte als

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \bar{\Psi} \left[ \gamma_\lambda \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right] \Psi \\ &+ \sum_{i=\sigma,\delta} \left( \partial^\mu \Phi_i \partial^\nu \Phi_i - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \partial_\lambda \Phi_i \partial^\lambda \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2 \right] \right) \\ &+ \sum_{\kappa=\omega,\rho} \left( \partial^\nu A_\lambda^{(\kappa)} F^{(\kappa)\lambda\mu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ -F_{\lambda\rho}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\lambda\rho} + m_\kappa^2 A_\lambda^{(\kappa)} A^{(\kappa)\lambda} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

In Gegensatz zu linearen Feldtheorien treten hier die aus der Dichteabhängigkeit der Kopplungsfunktionale stammenden Rearrangementenergien auf. Wir nehmen von jetzt an nur noch die VDD–Dichteabhängigkeit der Vertizes an. In unendlicher Kernmaterie verschwinden die Ableitungen der Mesonenfelder und  $T^{\mu\nu}$  vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sum_{b=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3 k}{E_b^*} \left[ k_b^{*\mu} k_b^{*\nu} + k_b^{*\mu} \left( \Sigma_b^{\nu(0)} + \Sigma^{\nu(r)} \right) - k_b^* \Sigma^{\lambda(r)} g^{\mu\nu} \right] \\ &+ g^{\mu\nu} \left[ \sum_{i=\sigma,\delta} m_i^2 \Phi_i^2 - \sum_{\kappa=\omega,\rho} m_\kappa^2 A_\lambda^{(\kappa)} A^{(\kappa)\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

In Anhang C wird gezeigt, dass Energie–Impuls–Erhaltung gegeben ist, also die Divergenz  $\partial_\nu T^{\mu\nu}$  verschwindet.

Die Grundzustandsenergie ist der Erwartungswert der nullten Komponente des Energie–Impuls–Tensors. Infolge der sphärischen Symmetrie verschwinden die raumartigen Komponenten der Selbstenergien und kanonischer und kinetischer Impuls sind identisch ( $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$ ). Man findet

$$\begin{aligned} \epsilon = \langle T^{00} \rangle &= \sum_{b=n,p} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} + \rho_b \Sigma_b^{0(0)} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ m_\sigma^2 \Phi_\sigma^2 + m_\delta^2 \Phi_\delta^2 - m_\omega^2 A_0^{(\omega)2} - m_\rho^2 A_0^{(\rho)2} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$= \sum_{b=n,p} \frac{1}{4} [3E_{F_b} \rho_b + m_b^* \rho_b^s] + \sum_{b=n,p} \frac{1}{2} \left[ \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right]. \quad (3.16)$$

Die Rearrangementbeiträge in Gl. (3.14) heben sich gerade gegenseitig auf, so dass Rearrangement nicht zur Grundzustandsenergie beiträgt. Dies ist ein wichtiges Ergebnis für die Bestimmung der Vertizes  $\Gamma_\alpha$  aus den Dirac–Brückner–Selbstenergien. Die

Bindungsenergie pro Nukleon ist identisch mit derjenigen aus DB-Rechnungen, die Zustandsgleichung wird also nicht verändert. In Gl. (3.16) haben wir unter Benutzung der Mesonenfeldgleichungen (3.5)-(3.8) die Beiträge der Mesonenfelder zur Energie in die Selbstenergien geschoben.

Für die Beschreibung der Zustandsgleichung wird dann die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon  $\epsilon/\rho = E_b/A - M$  angegeben.

### 3.1.2 Druck und chemisches Potential

Als nächstes berechnen wir den Druck  $P$  des Systems aus dem Energie-Impuls-Tensor. Es gilt:

$$P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle T^{ii} \rangle = \sum_{b=n,p} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3k \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}}} + \rho_b \Sigma^{0(r)} \right] - \frac{1}{2} \left[ m_\sigma^2 \Phi_\sigma^2 + m_\delta^2 \Phi_\delta^2 - m_\omega^2 A_0^{(\omega)^2} - m_\rho^2 A_0^{(\rho)^2} \right] \quad (3.17)$$

$$= \sum_{b=n,p} \frac{1}{4} [E_{F_b} \rho_b - m_b^* \rho_b^s] + \sum_{b=n,p} \frac{1}{2} [\rho_b \Sigma_b^{0(0)} - \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} + 2\rho_b \Sigma^{0(r)}] \quad (3.18)$$

Im Gegensatz zur Energiedichte  $\epsilon$  treten im Druck  $P$  die Rearrangementenergien explizit auf und beeinflussen die Lage des Sättigungspunktes von Kernmaterie, an dem  $P = 0$  gilt. Es ist offensichtlich, dass man die thermodynamische Konsistenz des Systems verletzen würde, wenn man diese nicht berücksichtigt. Thermodynamische Konsistenz bedeutet, dass die thermodynamische Definition des Druckes eines Systems mittels der Energiedichte identisch mit dem mechanischen Druck ist, den man aus dem Energie-Impuls-Tensor erhält, also

$$\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle T^{ii} \rangle. \quad (3.19)$$

Dies wird in Anhang D gezeigt.

Eine weitere wichtige thermodynamische Größe ist das chemische Potential  $\mu$ . Es kann als Lagrangemultiplikator des Variationsproblems angesehen werden, die Energiedichte  $\epsilon$  in einem gegebenen Volumen  $V$  unter der Nebenbedingung konstanter Teilchenzahl  $N$  zu minimieren. In asymmetrischer Kernmaterie hat man für Protonen und Neutronen unterschiedliche chemische Potentiale und findet:

$$\delta \left( \epsilon - \sum_{b=n,p} \mu_b \left( \rho_b - \frac{N_b}{V} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_b = \frac{\partial}{\partial \rho_b} \epsilon \quad (3.20)$$

Die Berechnung der Ableitung

$$\mu_b = \frac{\partial}{\partial \rho_b} \epsilon = \frac{\partial}{\partial \rho_b} \sum_{b=n,p} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} + \frac{1}{2} \left( \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right) \right] \quad (3.21)$$



erfolgt in Analogie zum Beweis der thermodynamischen Konsistenz in Anhang D. Man erhält das chemische Potential

$$\mu_b = \sqrt{k_{F_b}^2 + m_b^{*2}} + \left( \Sigma_b^{0(0)} + \Sigma_b^{0(r)} \right) = E_{F_b} + \Sigma_b^0. \quad (3.22)$$

Ein weiterer Test der Konsistenz des Modells ist das Hugenholtz–van Hove–Theorem [58]

$$\epsilon + P = \rho E(k_F) = \sum_{b=n,p} \rho_b E_b(k_{F_b}), \quad (3.23)$$

welches Druck und Energiedichte mit der Einteilchendichte an der Fermikante in Verbindung setzt. Im Falle von Sättigung ( $P = 0$ ) ist die mittlere Bindungsenergie pro Teilchen gerade die Einteilchen–Energie an der Fermikante. Man findet unter Benutzung von Gl. (3.16) und Gl. (3.18)

$$\epsilon + P = \sum_{b=n,p} \left( E_{F_b} \rho_b + \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b \Sigma_b^{0(r)} \right) = \sum_{b=n,p} \rho_b \mu_b, \quad (3.24)$$

wodurch sich die  $\mu_b$  auch als mittlere Protonen bzw. Neutronen–Einteilchen–Energien identifizieren lassen und das Hugenholtz–van Hove–Theorem sofort bestätigt wird.

## 3.2 Bestimmung der Vertizes in unendlicher Kernmaterie

Mit den im vorherigen Abschnitt berechneten Größen ist es jetzt möglich, die Zustandsgleichung von Kernmaterie zu beschreiben und aus Dirac–Brückner–Rechnungen stammenden Ergebnisse in dichteabhängiger relativistischer Hartree–Näherung (RHA) zu parametrisieren.

Die ursprünglich in [35, 36, 59] vorgeschlagene Vorgehensweise für die Verknüpfung der DB–Theorie und der dichteabhängigen RHA (DDRH) ist, für eine gegebene Baryonendichte die Hartree–Selbstenergien mit den DB–Selbstenergien zu identifizieren, also

$$\Sigma_{\text{DBHF}}(\rho) \equiv \Sigma_{\text{DRHA}}(\rho) = \Sigma_{\text{DRHA}}^s(\rho) + \gamma_0 \Sigma_{\text{DRHA}}^0(\rho). \quad (3.25)$$

Man berücksichtigt dabei nur dichteabhängige (bzw. nur von  $k_F$  abhängige) Selbstenergien, vernachlässigt also die in Kapitel 1 diskutierte Impulsabhängigkeit von  $\Sigma_{\text{DBHF}}(k, k_F)$ , und berechnet die Selbstenergien an einem festen Impuls  $k = k_F$ . Die daraus resultierenden Probleme werden in den nächsten Abschnitten noch genauer diskutiert.

In dieser lokalen Dichtenäherung (LDA) nimmt man nun an, dass  $\Sigma_{\text{DRHA}}(\rho)$  von der gleichen Struktur ist wie die Hartree–Selbstenergie  $\Sigma_{\text{RHA}}(\rho)$ . Diese enthält nur konstante Kopplungen und ist gegeben durch  $\Sigma_{\text{RHA}}(\rho) = g_\sigma \phi_\sigma(\rho) + \gamma_0 g_\omega A_0^{(\omega)}(\rho)$ . Ihre Dichteabhängigkeit resultiert nur aus den Mesonenfeldern. In der LDA setzt man nun dichteabhängige Kopplungen  $g_\alpha(\rho)$  an und kann in symmetrischer Kernmaterie unter Benutzung der Mesonenfeldgleichungen

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = g_\sigma(\rho) \rho^s, \quad m_\omega^2 A_0^{(\omega)} = g_\omega(\rho) \rho \quad (3.26)$$

die Selbstenergien in Gl. (3.25) durch die  $g_\alpha(\rho)$  ausdrücken:

$$\Sigma_{\text{DRHA}}^s(\rho) = \frac{g_\sigma^2(\rho)}{m_\sigma^2} \rho^s \equiv \Sigma_{\text{DBHF}}^s(\rho), \quad \Sigma_{\text{DRHA}}^0(\rho) = \frac{g_\omega^2(\rho)}{m_\omega^2} \rho \equiv \Sigma_{\text{DBHF}}^0(\rho) \quad (3.27)$$

Obwohl dieser Ansatz, der beide Theorien auf der Ebene der Einteilchenpotentiale gleichsetzt, eine einfache Verbindung zwischen den DB-Selbstenergien und den dichteabhängigen Kopplungen der RHA ermöglicht, ist er doch problematisch. Man nimmt hierbei nämlich an, dass die  $g_\alpha(\rho)$  Funktionen des Grundzustandserwartungswertes der Baryondichten sind und nicht Funktionale der Feldoperatoren, wie dies in Kapitel 2 allgemeiner definiert wurde. Deshalb enthalten die  $\Sigma_{\text{DRHA}}(\rho)$  in diesem Ansatz keine Rearrangementbeiträge.

Für die Berechnung der Zustandsgleichung in Kernmaterie hat dies keine Auswirkungen, da sich die Energiedichte  $\epsilon$  (Gl. (3.16)) nur aus den rearrangementfreien Beiträgen der Selbstenergie berechnet. Diese entsprechen den DB-Selbstenergien, so dass per Definition die Projektion aus Gl. (3.27) die DB-Bindungsenergie reproduziert. Auch enthält der Druck  $P$ , der über seine thermodynamische Definition  $P = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)$  aus der Energiedichte berechnet wird, Ableitungen der Kopplungen und der korrekte Sättigungspunkt wird beschrieben. Man muss sich jedoch veranschaulichen, dass bei einer Berechnung von  $P$  aus  $T^{\mu\nu}$  diese Terme nicht auftreten, wenn man nur dichteabhängige Funktionen annimmt und die thermodynamische Konsistenz damit verletzt wird.

Problematisch ist dieser Ansatz bei der Berechnung endlicher Kerne. Im Gegensatz zu Kernmaterie, in der im allgemeinen nur die makroskopischen Eigenschaften des Systems ( $\epsilon/\rho$ ,  $P$ ) betrachtet werden, sind in endlichen Kernen die Einteilcheneigenschaften (Einteilchenbindungsenergien, Dichteverteilungen) beobachtbar. Diese werden durch die Dirac-Gleichung bestimmt, die bei einer konsistenten feldtheoretischen Formulierung wie der DDRH aus Kapitel 2 jedoch Rearrangementbeiträge enthält. Dies führt zu einer Veränderung der Einteilcheneigenschaften und aufgrund der Ortsabhängigkeit der Felder auch indirekt zu einer Modifikation der makroskopischen Eigenschaften von Kernen [38]. Man kann die Dichteabhängigkeit der  $\Gamma_\alpha(\rho)$  und die Rearrangementselbstenergien auch als direkte Folge der Impuls- und Zustandsabhängigkeit von  $\Sigma_{\text{DBHF}}(k, k_F)$  sehen, die in endlichen Kernen beobachtbar wird. Dies wird in Teil II dieser Arbeit noch genauer diskutiert werden.

Da bei einer Abhängigkeit der Kopplungen von den Baryonenfeldern in der Definition der Selbstenergie Rearrangementterme auftauchen, die in der DB-Theorie nicht vorhanden sind, ist die Projektion in Gl. (3.25) inkonsistent. Deshalb ist es *nicht* möglich, über die Einteilchenpotentiale die Dichteabhängigkeit der Kopplungen korrekt zu bestimmen. Dies muss vielmehr über die makroskopischen Eigenschaften erfolgen, die unabhängig vom Rearrangement sind. Man identifiziert deshalb die DB- und die DDRH-Bindungsenergien miteinander. Für die potentielle Energie gilt mit Gl. (3.16)

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{DDRH}}(\rho) &= \rho \Sigma_{\text{DDRH}}^{0(0)}(\rho) + \rho^s \Sigma_{\text{DDRH}}^{s(0)}(\rho) \equiv \epsilon_{\text{DBHF}}(\rho) \\ &= \rho \Sigma_{\text{DBHF}}^0(\rho) + \rho^s \Sigma_{\text{DBHF}}^s(\rho). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Unter Verwendung der Mesonenfeldgleichungen (3.5) und (3.6) ergibt sich damit ein zu Gl. (3.25) identischer Ausdruck

$$\Sigma_{\text{DDRH}}^{s(0)}(\rho) = \frac{\Gamma_\sigma^2(\rho)}{m_\sigma^2} \rho^s \equiv \Sigma_{\text{DBHF}}^s(\rho), \quad \Sigma_{\text{DDRH}}^{0(0)}(\rho) = \frac{\Gamma_\omega^2(\rho)}{m_\omega^2} \rho \equiv \Sigma_{\text{DBHF}}^0(\rho), \quad (3.29)$$

der jedoch wie oben diskutiert anders interpretiert werden muss, da sich nun die Einzelchenpotentiale im Vergleich zur DB–Theorie unterscheiden. Für den Fall der VDD–Dichteabhängigkeit wird nur das Vektorpotential durch die Rearrangementterme modifiziert. Wählt man jedoch die SDD–Dichteabhängigkeit wird auch das skalare Potential und damit die effektive Masse

$$m_{\text{DDRH}}^*(\rho) = M - \Sigma_{\text{DDRH}}^{s(0)}(\rho) - \Sigma_{\text{DDRH}}^{s(r)}(\rho) \quad (3.30)$$

$$\neq m_{\text{DBHF}}^*(\rho) = M - \Sigma_{\text{DBHF}}^s(\rho) \quad (3.31)$$

verändert. Um die dynamischen Eigenschaften der Baryonen im Medium möglichst identisch zu DB–Rechnungen zu parametrisieren, ist deshalb der VDD–Ansatz vorzuziehen.

Die Parametrisierung der DB–Ergebnisse erfolgt durch einen Fit der in Hartree–Näherung dichteabhängigen Funktionen  $\Gamma_\alpha(\rho)$  an die Selbstenergien  $\Sigma_{\text{DBHF}}(\rho)$ . Um die  $\Gamma_\alpha(\rho)$  in der dichteabhängigen Feldtheorie verwenden zu können, ist es notwendig, die folgenden Abbildungen zu definieren

$$\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0) = \int_0^\infty \Gamma_\alpha(\rho_{nm}) \delta(\rho_{nm}^2 - \hat{\rho}_0^2) 2\rho_{nm} d\rho_{nm} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} = \int_0^\infty \frac{\partial \Gamma_\alpha(\rho_{nm})}{\partial \rho_{nm}} \delta(\rho_{nm}^2 - \hat{\rho}_0^2) 2\rho_{nm} d\rho_{nm}, \quad (3.33)$$

die für eine gegebene Kernmaterie–Vektordichte  $\rho_{nm}$  die dichteabhängigen Kopplungsfunktionen auf den feldtheoretischen Meson–Baryon–Vertex  $\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)$  und seine Variation projizieren.

Dies wurde bei den ersten dichteabhängigen Beschreibungen jedoch nicht berücksichtigt [35, 36]. Dort wurde die Projektion der Dirac–Brückner–Ergebnisse auf die Vertizes in der lokalen Dichtenäherung vorgenommen und direkt von Kernmaterie auf endliche Systeme übertragen.

### 3.3 Parametrisierung des Groningen NN–Potentials in asymmetrischer Kernmaterie

Als nächstes werden die DB–Selbstenergien aus Kapitel 1 (Abbildungen 1.4 und 1.5) parametrisiert. Da die Rechnungen für das Groningen NN–Potential [28, 43] in asymmetrischer Kernmaterie durchgeführt wurden [32], existieren für Protonen und Neutronen für ein jeweils gegebenes Asymmetrieverhältnis

$$a_s = \frac{\rho_p}{\rho_n + \rho_p} \quad (3.34)$$

verschiedene skalare und vektorielle Selbstenergien, die als  $\Sigma_{n,p}^{\text{sDB}}(\rho_n, \rho_p)$  und  $\Sigma_{n,p}^{0\text{DB}}(\rho_n, \rho_p)$  bezeichnet werden und von  $\rho_n$  und  $\rho_p$  abhängen. In Analogie zu Abschnitt 3.2 bestimmen wir die dichteabhängigen Kopplungen durch Identifizierung der Selbstenergien

über die potentielle Energie in asymmetrischer Kernmaterie. Mit den Definitionen

$$\Sigma_0^{sDB}(\rho_n, \rho_p) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_n^{sDB}(\rho_n, \rho_p) + \Sigma_p^{sDB}(\rho_n, \rho_p) \right] \quad (3.35)$$

$$\Sigma_3^{sDB}(\rho_n, \rho_p) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_n^{sDB}(\rho_n, \rho_p) - \Sigma_p^{sDB}(\rho_n, \rho_p) \right] \quad (3.36)$$

$$\Sigma_0^{0DB}(\rho_n, \rho_p) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_n^{0DB}(\rho_n, \rho_p) + \Sigma_p^{0DB}(\rho_n, \rho_p) \right] \quad (3.37)$$

$$\Sigma_3^{0DB}(\rho_n, \rho_p) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_n^{0DB}(\rho_n, \rho_p) - \Sigma_p^{0DB}(\rho_n, \rho_p) \right] \quad (3.38)$$

findet man unter Verwendung der Mesonenfeldgleichungen (3.5)-(3.8) die zu Gl. (3.29) analogen Ausdrücke

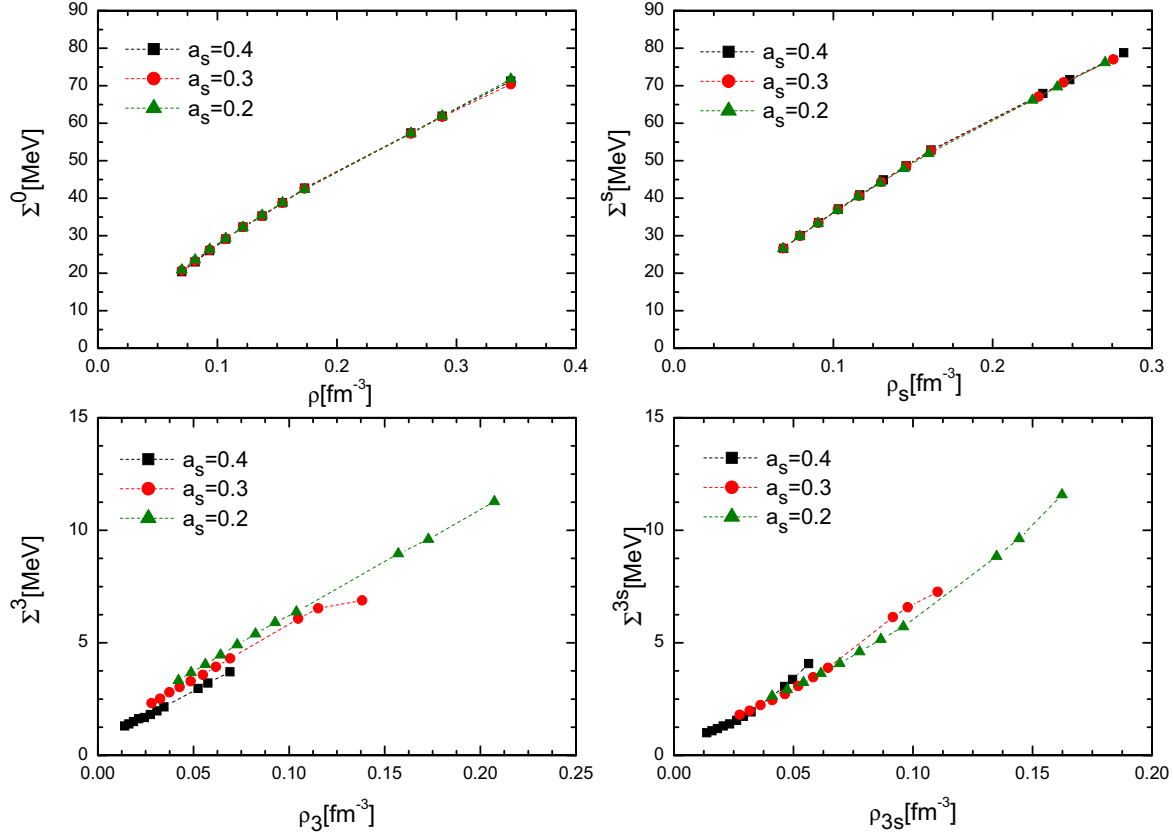
$$\left( \frac{\Gamma_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 = \frac{\Sigma_0^{sDB}(\rho_n, \rho_p)}{\rho^s}, \quad \left( \frac{\Gamma_\omega}{m_\omega} \right)^2 = \frac{\Sigma_0^{0DB}(\rho_n, \rho_p)}{\rho} \quad (3.39)$$

$$\left( \frac{\Gamma_\delta}{m_\delta} \right)^2 = \frac{\Sigma_3^{sDB}(\rho_n, \rho_p)}{\rho_3^s}, \quad \left( \frac{\Gamma_\rho}{m_\rho} \right)^2 = \frac{\Sigma_3^{0DB}(\rho_n, \rho_p)}{\rho_3}. \quad (3.40)$$

Es ist offensichtlich, dass es ohne Berücksichtigung des  $\delta$ -Mesons nicht möglich gewesen wäre, die isoskalaren–skalaren Selbstenergien zu parametrisieren und so den Isevektor-kanal der Wechselwirkung korrekt zu beschreiben. Dies ist ein wichtiger Unterschied zu phänomenologischen Parametrisierungen der Wechselwirkung. Dort wird im Isevektor-kanal nur ein effektives  $\rho$ -Meson verwendet, dessen Stärke im wesentlichen gerade der Differenz der skalaren und vektoriellen Isevektormeson  $\rho$  und  $\delta$  aus dem DB-Modell entspricht. Daraus ist erkennbar, dass die relativistische Struktur der Isevektorwechselwirkung nur unvollständig wiedergegeben wird.

Wir haben in Kapitel 2 angenommen, dass unsere Kopplungsfunktionale nur durch die Gesamtdichte parametrisiert werden und die Abhängigkeit von den einzelnen Baryonendichten bzw. der Asymmetriedichte  $\rho_3 = \rho_n - \rho_p$  in erster Ordnung vernachlässigt werden kann. Um zu überprüfen, ob dieser Ansatz auf die DB-Ergebnisse anwendbar ist, zeigen wir in Abbildung 3.1 die (iso-)skalaren und (iso-)vektoriellen DB-Selbstenergien in Abhängigkeit von der jeweils zugehörigen Dichte. In erster Ordnung sollten dies linear ansteigende Kurve sein, die unabhängig von der Asymmetrie  $a_s$  sind. Für die isoskalaren Selbstenergien ist diese Relation fast perfekt erfüllt, bei den isovektoriellen Selbstenergien gibt es kleine Abweichungen, die jedoch in guter Näherung vernachlässigt werden können.

Somit können die Selbstenergien durch die Funktionen auf der linken Seite der Gleichungen (3.39) und (3.40) in Abhängigkeit von der Baryonendichte  $\rho$  parametrisiert werden. Man kann sich aus Gl. (3.16) leicht überlegen, dass die Eigenschaften der Zustandsgleichung unverändert bleiben, solange die Verhältnisse  $\left( \frac{\Gamma_\alpha}{m_\alpha} \right)^2(\rho)$  immer die gleichen Funktionen von  $\rho$  sind, unabhängig davon, ob die Dichteabhängigkeit in den Kopplungen, den Mesonenmassen oder in beiden steckt [60]. Analog dazu kann man die nichtlineare Mesonenselbstwechselwirkung in Modellen mit konstanten Kopplungen auch als effektive, dichteabhängige Masse interpretieren. In endlichen Kernen hingegen ist diese Gleichheit nicht mehr gegeben, da Masse und Kopplungen das System unabhängig voneinander beeinflussen. Dieser Ansatz würde auch eine andere Projektion



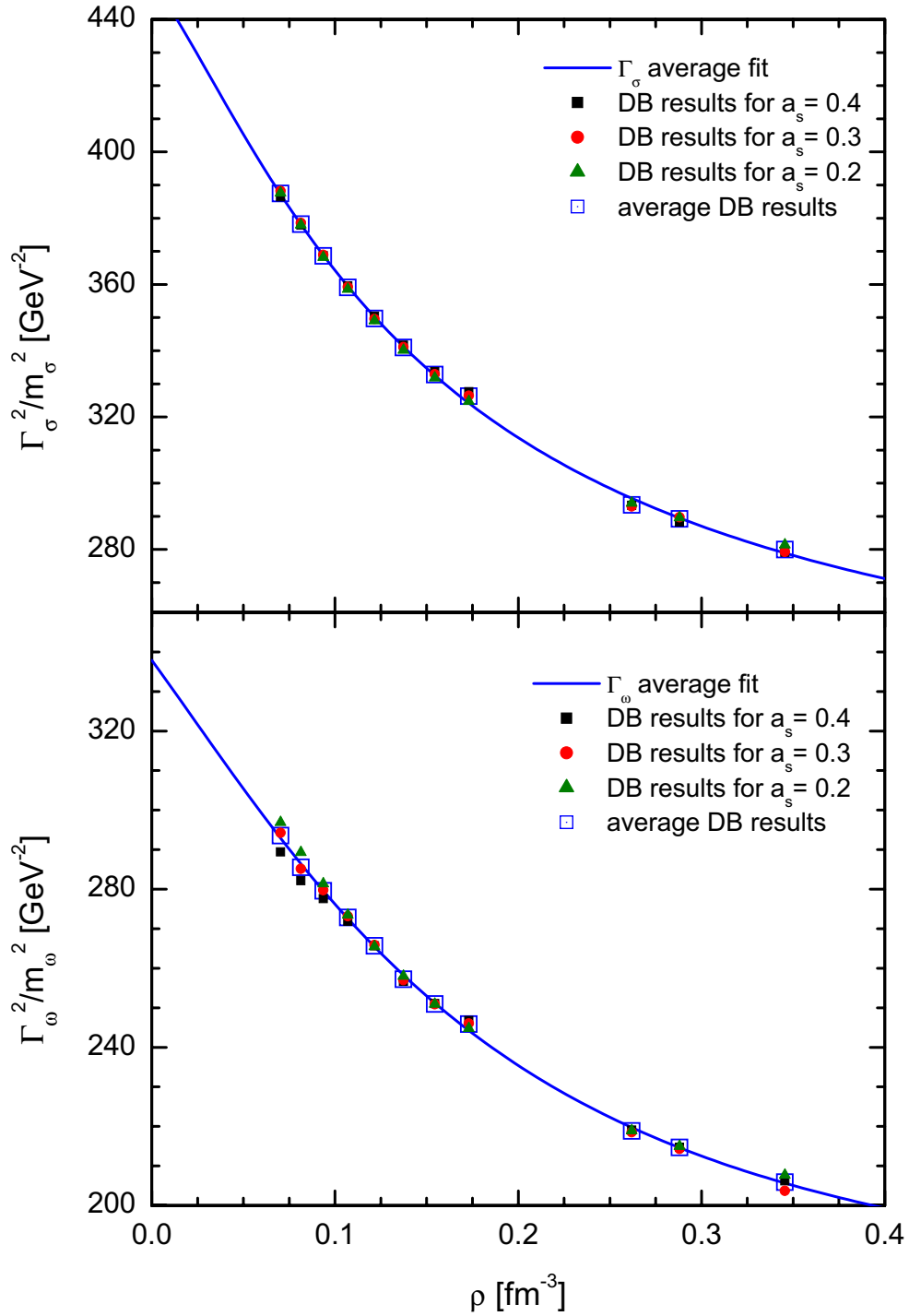
**Abb. 3.1:** (Iso-)Skalare und (iso-)vektorielle DB-Selbstenergien in Abhängigkeit von der jeweils zugehörigen Nukleonendichte, berechnet bei verschiedenen Asymmetrien  $a_s = 0.2, 0.3, 0.4$  mit dem Groningen NN-Potential.

als in Gl.(3.32) erfordern. Wir folgen daher dem Ansatz der DDRH und parametrisieren die DB-Selbstenergien nur durch dichteabhängige Kopplungen.

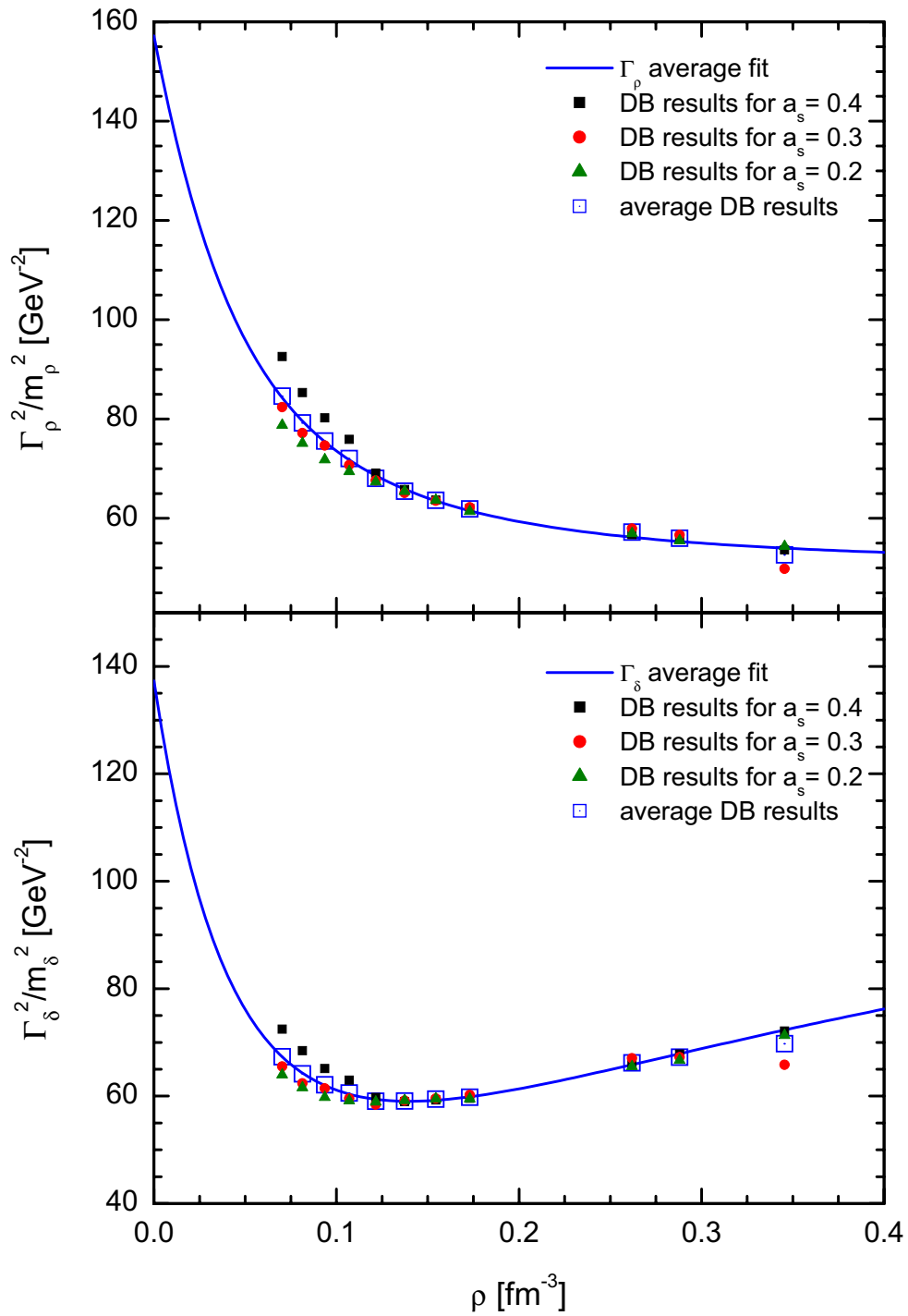
Verschiedene analytische Ansätze für die Dichteabhängigkeit sind in der Literatur untersucht worden. Eine Parametrisierung der Kopplungen als Polynom in  $k_F \sim \rho^{1/3}$  wurde in [36] vorgestellt. Dort wurden die mit dem Bonn A NN-Potential [3] in symmetrischer Kernmaterie berechneten DB-Selbstenergien [35] durch eine Entwicklung von  $\Gamma_\alpha^2$  in  $k_F$  um die Sättigungsdichte  $\rho_0$  bzw.  $k_{F0} = \frac{3\pi^2}{2}\rho_0^{1/3}$  dargestellt:

$$\left(\frac{\Gamma_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 = a_\alpha \left[ 1 + b_\alpha \left(1 - \frac{k_F}{k_{F0}}\right) + c_\alpha \left(1 - \frac{k_F}{k_{F0}}\right)^2 \right] \quad (3.41)$$

Dieser Ansatz erlaubt einen exzellenten Fit der Selbstenergien in dem für endliche Kerne wichtigen Dichtebereich um  $\rho_0$  und wurde erfolgreich in Kernstrukturrechnungen angewendet [36, 38, 39, 41]. Aufgrund des Polynomansatzes ist das Verhalten der Kopplungen bei geringen Dichten ( $< 0.5\rho_0$ ) und höheren Dichten ( $> 2.5\rho_0$ ) instabil. So steigen sie bei hohen Dichten sehr stark an, was dem physikalisch zu erwartenden Sättigungsverhalten widerspricht. Da die Parametrisierung später für die Berechnung von Neutronensternen mit Dichten  $\sim 5-7\rho_0$  angewendet werden soll, ist dies problema-



**Abb. 3.2:** Effektive Dichteabhängigkeit der isoskalaren  $\sigma$  (oben) und  $\omega$  (unten) Meson-Nukleon-Vertizes. Gezeigt werden Ergebnisse, die aus Dirac-Brückner-Rechnungen mit dem Groningen NN-Potential bei verschiedenen Asymmetrien  $a_s = 0.2, 0.3, 0.4$  extrahiert wurden. Die Kurve repräsentiert den Fit durch die gemittelten DB-Ergebnisse.



**Abb. 3.3:** Effektive Dichteabhängigkeit der isovektoriellen  $\rho$  (oben) und  $\delta$  (unten) Meson-Nukleon-Vertizes für das Groningen NN-Potential; analog Abbildung 3.2

meson $\alpha$	$\sigma$	$\omega$	$\delta$	$\rho$
$m_\alpha$ [MeV]	550	783	983	770
$a_\alpha$	13.1334	15.1640	19.1023	12.8373
$b_\alpha$	0.4258	0.3474	1.3653	2.4822
$c_\alpha$	0.6578	0.5152	2.3054	5.8681
$d_\alpha$	0.7914	0.5989	0.0693	0.3671
$e_\alpha$	0.7914	0.5989	0.5388	0.3598
$\rho_0 = 0.16 \text{ [fm}^{-3}\text{]}$				

**Tab. 3.1:** Dichteabhängigen Kopplungen für das Groningen NN-Potential. Die Parameter für die Kopplungen aus Gl. (3.42) wurden durch einen Fit an DB-Selbstenergien aus asymmetrischer Kernmaterie [32] bestimmt.

tisch. Weiterhin steigen für  $k_F \rightarrow 0$  die Kopplungen extrem stark an und die Ableitung  $\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial \rho}$  divergiert sogar. Numerisch ist dies kein Problem, da in den Rechnungen immer nur Terme der Form  $\sim \rho \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial \rho}$  auftauchen, die wohldefiniert sind. Physikalisch ist dieses Verhalten jedoch unbefriedigend.

Der in [60] vorgeschlagene Ansatz einer rationalen Approximation der Kopplungsfunktion in  $\rho$

$$\Gamma_\alpha(\rho) = a_\alpha \left[ \frac{1 + b_\alpha \left( \frac{\rho}{\rho_0} + d_\alpha \right)^2}{1 + c_\alpha \left( \frac{\rho}{\rho_0} + e_\alpha \right)^2} \right] \quad (3.42)$$

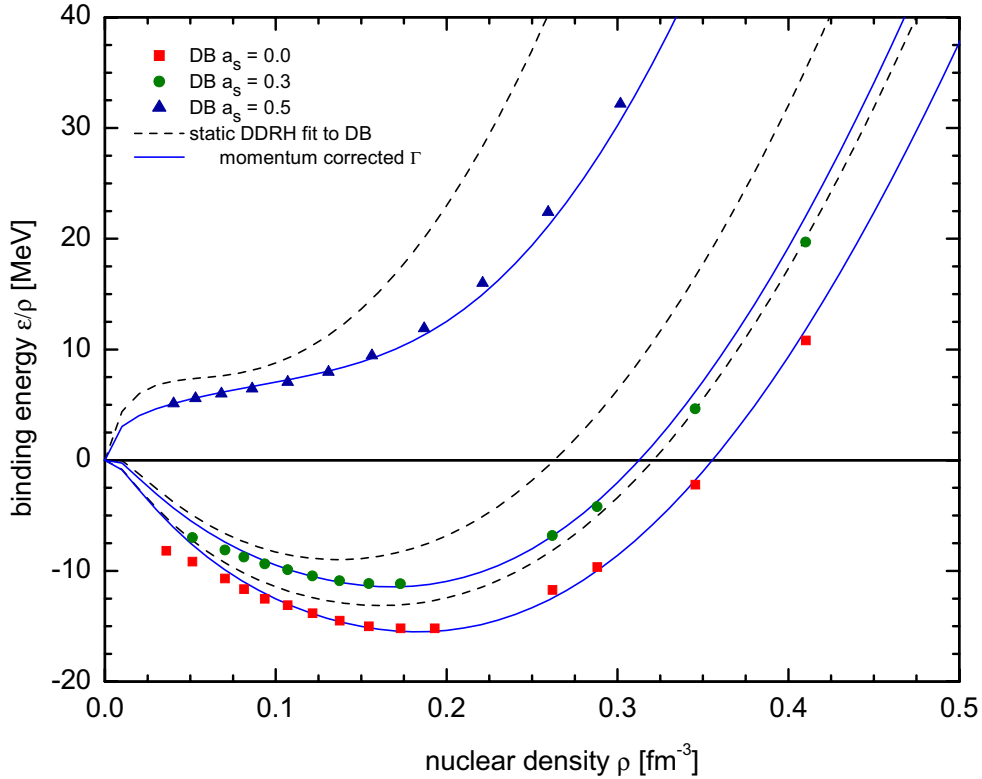
vermeidet diese Probleme. Er besitzt ein wohldefiniertes Verhalten bei geringen Dichten und sättigt bei hohen Dichten gegen einen konstanten Wert.

Unter Verwendung von Gl. (3.42) wurden die in Gl. (3.39) und (3.40) definierten Kopplungen an die DB-Selbstenergien des Groningen NN-Potentials angepasst. Tabelle 3.1 zeigt die Ergebnisse für diesen Fit. In Abbildung 3.2 werden die isoskalaren und in Abbildung 3.3 die isovektoriellen Kopplungsfunktionen dargestellt. Die Beschreibung der DB-Selbstenergien ist sehr gut. Im isoskalaren Kanal ( $\sigma, \omega$ ) ist es sogar ausreichend,  $d_\alpha = e_\alpha$  zu setzen. Im isovektoriellen Kanal ( $\delta, \rho$ ) ist der Fit schwieriger, insbesondere aufgrund der ansteigenden Werte der  $\delta$ -Kopplung bei hohen Dichten. Der zusätzliche Parameter  $e_\alpha$  ist hier notwendig, um eine gute Beschreibung der Selbstenergien bei niedrigen und hohen Dichten zu gewährleisten. Man erkennt analog zu Abbildung 3.1, dass die Kopplungen unabhängig von der Asymmetrie sind, bei der die Selbstenergien berechnet wurden. Vor allem im wichtigen Dichtebereich um  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  wird dies mit hoher Genauigkeit erfüllt.

Technisch wurde der Fit durchgeführt, indem über die Asymmetrien  $a_s = 0.2, 0.3, 0.4$  gemittelt wurde, um alle erhältlichen Daten zu berücksichtigen, und danach der Durchschnitt parametrisiert wurde. Selbstenergien in der Nähe der Sättigungsdichte wurden stärker gewichtet, um diesen Bereich im Hinblick auf Kernstrukturrechnungen besonders akkurat beschreiben zu können.

Um die Qualität der effektiven Parametrisierung (Tabelle 3.1) der mediumabhängigen Wechselwirkung zu überprüfen, untersuchen wir die Zustandsgleichung (EoS) von asymmetrischer Kernmaterie. In Abbildung 3.4 wird die EoS für symmetrische Kern-





**Abb. 3.4:** Zustandsgleichung unendlicher Kernmaterie berechnet mit dem Groningen NN-Potential. Gezeigt werden Ergebnisse für symmetrische Kernmaterie, Neutronenmaterie und das Asymmetrieverhältnis  $a_s = 0.3$ . Während der statische Fit an die DB-Selbstenergien die DB-Zustandsgleichung nicht zufriedenstellend beschreiben kann, ist die Übereinstimmung für die impuls-korrigierten Selbstenergien hervorragend.

materie ( $a_s = 0.5$ ), für reine Neutronenmaterie ( $a_s = 0.0$ ) und für eine Kernmaterie mit dem Asymmetrieverhältnis  $a_s = 0.3$  gezeigt (gestrichelte Linien). Dargestellt werden zum Vergleich die DB-Bindungsenergien des Groningen NN-Potential. Man erkennt, dass die DB EoS offensichtlich nicht reproduziert werden kann, obwohl der Fit die Selbstenergien um  $\rho_0$  sehr gut beschreibt. Während die DB EoS eine Sättigungsdichte von  $\rho_0 = 0.182 \text{ fm}^{-3}$  und dort eine Bindungsenergie von  $\epsilon/\rho_0 = -15.6 \text{ MeV}$  besitzt, ist die DDRH EoS um ca. 2.5 MeV pro Nukleon zu schwach gebunden ( $\epsilon/\rho_0 = -13.13 \text{ MeV}$ ) und die Sättigungsdichte zu geringeren Dichten verschoben ( $\rho_0 = 0.161 \text{ fm}^{-3}$ ). Der Grund hierfür liegt in der Art und Weise, wie die Selbstenergien aus Dirac-Brückner-Rechnungen extrahiert wurden. Dies wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

### 3.4 Die Impulskorrektur der DB-Vertizes

Selbstenergien aus Brückner-Rechnungen  $\Sigma^{\text{DB}}(k, k_F)$  sind im allgemeinen impulsabhängig (siehe Kapitel 1). Der gewöhnliche Ansatz, um sie in Hartree-Näherung verwenden zu können, ist, die Impulsabhängigkeit zu vernachlässigen und die Selbstenergien direkt an der Fermikante  $k = k_F$  zu berechnen bzw. über die Fermikugel zu mitteln [32, 42]. In den DB-Rechnungen für das Bonn A NN-Potential [29] wurde die Impulsabhängigkeit sogar schon *a priori* vernachlässigt. Da die Extraktion der Selbstenergien in der Hartree-Näherung erfolgt, werden die impulsabhängigen Austauschsterme implizit durch den direkten Term mitparametrisiert. Um den durch die Vernachlässigung der Impulsabhängigkeit entstehenden Fehler qualitativ beschreiben zu können, entwickeln wir die DB-Selbstenergien um den Fermiimpuls

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{DB}}(k, k_F) &= \Sigma^{\text{DB}}(k_F, k_F) \\ &+ (k^2 - k_F^2) \frac{\partial \Sigma^{\text{DB}}(k, k_F)}{\partial k^2} \Big|_{k=k_F} + O(k^4) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\equiv \Sigma^{\text{DB}}(k_F) + (k^2 - k_F^2) \Sigma'(k_F). \quad (3.44)$$

Der erste Term wird normalerweise mit der Hartree-Selbstenergie identifiziert [29]. Der zweite Term ist ein Maß für die Impulsabhängigkeit in der Umgebung der Fermikante. Die Wahl der quadratischen Abhängigkeit in  $k$  wird durch Brückner-Rechnungen unterstützt [42]. Benutzt man jedoch nur  $\Sigma^{\text{DB}}(k_F)$  für die Bestimmung der dichteabhängigen Kopplungen, wird die DB-Zustandsgleichung nicht zuverlässig reproduziert, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde. Dies wurde in der Literatur zwar diskutiert [36, 41], aber es wurde bis jetzt keine zufriedenstellende Lösung gefunden. Zur Lösung dieses Problems berücksichtigen wir auch den zweiten Term in Gl. (3.44). Dies erfolgt durch die zusätzliche Nebenbedingung, dass die Selbstenergien so gewählt werden müssen, dass die DB EoS und die DDRH EoS identisch sind, also  $\epsilon^{\text{DB}} \equiv \epsilon^{\text{DDRH}}$ .

Dazu werden, wie schon in Abschnitt 3.2 diskutiert wurde, die Selbstenergien der beiden Modelle über ihre Beiträge zur Energiedichte identifiziert. Wie man aus Gl. (3.16) erkennen kann, ist der Hartree-Beitrag der Vektorselbstenergie zur potentiellen Energie von symmetrischer Kernmaterie durch  $\epsilon_{\text{pot}}^0(k_F) = \rho \Sigma^{0(0)}(k_F)$  gegeben.

Durch Mittelung über die Fermikugel des gleichen Beitrags der DB-Selbstenergie  $\Sigma^{0\text{DB}}(k, k_F)$  und Gleichsetzen der potentiellen Energien findet man die Bedingung

$$\begin{aligned} \rho(k_F) \Sigma^{0(0)}(k_F) &= \frac{4}{(2\pi)^3} \int_{|k| \leq k_F} d^3k \Sigma^{0\text{DB}}(k, k_F) \\ &= \rho(k_F) \Sigma^{0\text{DB}}(k_F) - \Sigma'(k_F) \frac{2}{15} k_F^5 \\ &= \rho(k_F) \Sigma^{0\text{DB}}(k_F) \left[ 1 - \frac{2}{3} k_F^2 \frac{\Sigma'(k_F)}{\Sigma^{0\text{DB}}(k_F)} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Es ist offensichtlich, dass der zweite Term in den Klammern als Korrektur interpretiert werden kann, die berücksichtigt werden muss, um die DB-EoS zu beschreiben. Er sollte deshalb auch in den extrahierten impulsunabhängigen Selbstenergien enthalten sein.

Der Beitrag der skalaren Mesonen kann entsprechend behandelt werden. Man muss jedoch beachten, dass die skalare Selbstenergie auch in der effektiven Masse  $m^*$  enthalten ist. Deshalb beeinflusst eine Änderung von  $\Sigma^{s(0)}(k_F)$  nach Gl. 3.45 auch die skalare Dichte  $\rho^s(m^*)$  und damit indirekt auch wieder die modifizierte Selbstenergie. Aufgrund dieses Selbstkonsistenzproblems ist es nicht möglich, einen geschlossenen Ausdruck für den exakten Impulskorrekturfaktor zu erhalten. Der Ansatz aus Gl. 3.45 ist jedoch weiterhin gültig, nur dass  $\Sigma'(k_F)$  numerisch bestimmt werden muss. Prinzipiell könnte  $\Sigma'(k_F)$  aus Gl. (3.43) für die Vektorselbstenergien direkt aus DB–Rechnungen bestimmt werden. Dieser Wert wird jedoch normalerweise nicht angegeben und müsste im skalaren Fall aufgrund der impliziten Abhängigkeit von  $\rho^s(m^*)$  noch modifiziert werden. Wir bestimmen daher  $\Sigma'(k_F)$  für alle Mesonen numerisch, indem die DDRH–Bindungsenergie an die DB EoS angepasst wird. Dieses Vorgehen hat den weiteren Vorteil, dass implizit Korrekturen höherer Ordnung ( $O(k^4)$ ) eingeschlossen sind, und man dadurch die DB–Bindungsenergien exakt reproduzieren kann.

Die Impulskorrektur der Selbstenergien lässt sich als Modifikation der Kopplungsfunktionen interpretieren

$$\Gamma^2(k_F) \rightarrow \tilde{\Gamma}^2(k_F) \equiv \Gamma^2(k_F) \left[ 1 - \frac{2}{3} k_F^2 \frac{\Sigma'(k_F)}{\Sigma^{\text{DB}}(k_F)} \right]. \quad (3.46)$$

In erster Näherung kann man jedoch annehmen, dass das Verhältnis  $\Sigma'(k_F)/\Sigma^{\text{DB}}(k_F)$  nur schwach von  $k_F$  abhängt. Wir definieren deshalb die impulskorrigierten Meson–Nukleon–Vertizes

$$\tilde{\Gamma}_\alpha(k_F) = \Gamma_\alpha(k_F) \sqrt{1 + \zeta_\alpha k_F^2} \quad (3.47)$$

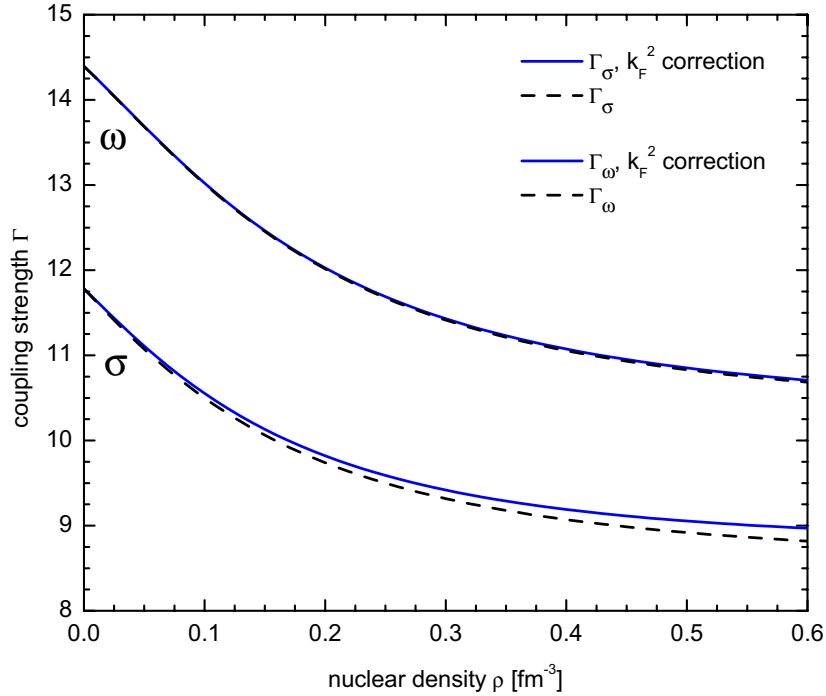
mit den Konstanten  $\zeta_\alpha$ , die durch Anpassung an die DB EoS bestimmt werden. Dadurch werden auch die Rearrangementbeiträge modifiziert. Man findet:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_\alpha(k_F)}{\partial \rho} = \sqrt{1 + \zeta_\alpha k_F^2} \frac{\partial \Gamma_\alpha(k_F)}{\partial \rho} + \frac{k_F}{3\rho} \frac{k_F \zeta_\alpha}{\sqrt{1 + \zeta_\alpha k_F^2}} \Gamma_\alpha(k_F) \quad (3.48)$$

Ein allgemeinerer Ansatz wäre,  $\zeta_\alpha(k_F)$  vom Fermiimpuls abhängen zu lassen.

Es sollte bemerkt werden, dass die modifizierten Selbstenergien nicht die exakten DB–Selbstenergien repräsentieren, da die Anpassung nicht auf der Ebene der Einteilchenenergien durchgeführt wurde, sondern durch Vergleich der makroskopischen Bindungsenergie der Zustandsgleichung. Es ist auch ersichtlich, dass nur die Berücksichtigung von Austauschtermen (Hartree–Fock), die explizite Beschreibung der Impulsabhängigkeit auf der Ebene der Einteilchenenergien erlaubt. Weil diese durch eine Fierz–Transformation bereits implizit in den Hartree–Vertizes enthalten sind [10, 51], ist eine solche Vorgehensweise jedoch nicht zulässig.

Man kann sich verschiedene Möglichkeiten vorstellen, die Impulskorrekturfaktoren in einer Rechnung konkret zu bestimmen. Eine ist,  $\zeta_\sigma$  und  $\zeta_\omega$  an die Sättigungseigenschaften von isospinsymmetrischer Kernmaterie anzupassen. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, z. B. den  $\sigma$ –Vertex unverändert zu lassen und  $\zeta_\omega$  für jeden Punkt der EoS anzupassen. Man erhält dann einen dichteabhängigen Korrekturfaktor  $\zeta_\omega(k_F)$ . Offensichtlich ist die Vorschrift zur Bestimmung der Faktoren  $\zeta_\alpha$  nicht eindeutig, was teilweise auch aus der Nichteindeutigkeit der Projektion der Selbstenergie auf die Lorentz–Invarianten (Kapitel 1) resultiert [32, 42].



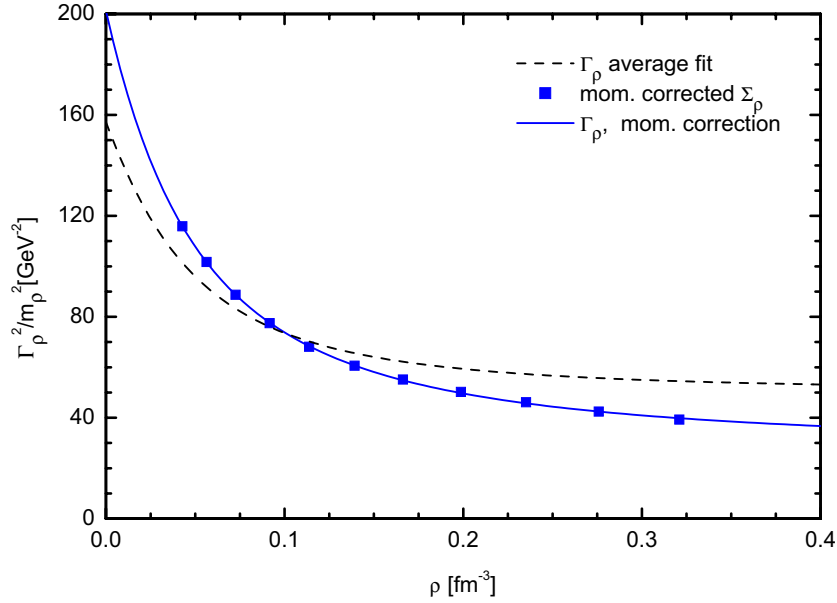
**Abb. 3.5:** Impulskorrigierte Dichteabhängigkeit der  $\sigma$  und  $\omega$  Meson–Nukleon–Vertizes im Vergleich zu den Fits aus Abbildung 3.2. Gezeigt werden Ergebnisse für die Korrekturfaktoren  $\zeta_\sigma = 0.00804 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = 0.00103 \text{ fm}^{-2}$ .

Die Verwendung konstanter Impulskorrekturfaktoren  $\zeta_\alpha$  erlaubt es jedoch, makroskopische Eigenschaften von DB–Rechnungen abzubilden, ohne jede Selbstenergie separat anzupassen, und minimiert damit die Anzahl der zusätzlichen Parameter. Die Qualität dieser Näherung kann direkt durch die Übereinstimmung der DB- und DDRH–Zustandsgleichungen überprüft werden.

### 3.5 Anpassung an die DB–Zustandsgleichung

Die im letzten Abschnitt diskutierte Impulskorrektur der Vertizes wird nun auf die in Abschnitt 3.3 bestimmte Parametrisierung des Groningen NN–Potentials angewendet. Dies erfolgt in zwei Schritten. Als erstes wird nur symmetrische Kernmaterie betrachtet und es wird versucht, die DB EoS durch Anpassung von  $\Gamma_\sigma$  und  $\Gamma_\omega$  zu beschreiben. Unter der Annahme  $\zeta_\alpha = \text{const.}$  werden  $\zeta_\sigma$  und  $\zeta_\omega$  numerisch so bestimmt, dass der Sättigungspunkt der DB EoS reproduziert wird. Man findet die sehr geringen Korrekturen  $\zeta_\sigma = 0.00804 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = 0.00103 \text{ fm}^{-2}$  und die Bindungsenergien werden, wie man in Abbildung 3.4 erkennen kann (durchgezogene Linie), mit hoher Genauigkeit über den gesamten Dichtebereich beschrieben. Die Differenzen bei sehr niedrigen Dichten resultieren aus der Tatsache, dass dort Brückner–Rechnungen nur noch bedingt anwendbar sind und die Werte der Bindungsenergien als unsicher betrachtet werden müssen.

Dies ist ein wichtiges Ergebnis, da wir durch Anpassung an nur einen Punkt die



**Abb. 3.6:** Impulskorrigierte Dichteabhängigkeit des  $\rho$  Meson–Nukleon–Vertex im Vergleich zu dem Fit aus Abbildung 3.3 sowie die korrigierten Selbstenergien.

$a_\alpha$	$b_\alpha$	$c_\alpha$	$d_\alpha$	$e_\alpha$
19.6270	1.7566	8.5541	0.7783	0.5746
$\rho_0 = 0.16 [fm^{-3}]$				

**Tab. 3.2:** Parametrisierung des  $\rho$  Meson–Nukleon–Vertex nach der Anpassung der Bindungsenergie der DDRH–Zustandsgleichung für Neutronenmaterie an die DB–Bindungsenergie.

Zustandsgleichung sowohl für niedrige als auch für hohe Dichten reproduzieren können. Damit ist die Annahme der  $k_F^2$ –Abhängigkeit der Impulskorrektur der Kopplungen gerechtfertigt. Es sollte bemerkt werden, dass  $k_F$  in der Größenordnung von eins liegt ( $k_F(\rho_0) \sim 1.33$  fm), und damit die Werte für die  $\zeta_\alpha$  direkt als prozentuale Korrektur der Kopplungen interpretiert werden können, also  $\sim 0.1\%$  Änderung für  $\Gamma_\omega$  und  $\sim 0.8\%$  Änderung für  $\Gamma_\sigma$ . Dies illustriert Abbildung 3.5, in der die impulskorrigierten Kopplungskonstanten mit dem statischen Fit aus Abschnitt 3.3 verglichen werden. Die Korrektur nimmt, wie aufgrund ihrer  $k_F^2$ –Abhängigkeit erwartet, mit höheren Dichten zu, bleibt aber klein für das  $\sigma$ –Meson und fast vernachlässigbar für das  $\omega$ –Meson. Trotzdem reichen diese geringen Veränderungen aus, um 2.5 MeV Bindungsenergie am Sättigungspunkt zu gewinnen.

Wir folgern daraus, dass die Zustandsgleichung extrem sensitiv auf kleine Änderungen in den Kopplungskonstanten reagiert. Es ist deshalb sehr wichtig, die Selbstenergien akkurat zu parametrisieren. Dies gilt auch für DB–Rechnungen: Die Extraktion der Selbstenergien sollte mit hoher Präzision erfolgen, und ein konsistentes Vorgehen bei der Projektion der Selbstenergien auf die Lorentz–Invarianten ist unabdingbar.

Nachdem  $\Gamma_\sigma$  und  $\Gamma_\omega$  korrigiert wurden, wird im zweiten Schritt die Isektorwechselwirkung angepasst. Da die Kopplungen  $\Gamma_\rho$  und  $\Gamma_\delta$  mit größeren Unsicherheiten behaftet sind als  $\Gamma_\sigma$  und  $\Gamma_\omega$ , wählen wir einen anderen Weg für die Impulskorrektur. Für einen festen Wert  $\Gamma_\delta$  wird  $\zeta_\rho$  an die DB-Bindungsenergien von Neutronenmaterie ( $a_s = 0.0$ ) angepasst. Man erhält so eine dichteabhängige Korrektur  $\zeta_\rho(\rho)$  und stellt sicher, dass die Zustandsgleichung akkurat beschrieben wird. Anstatt jedoch  $\zeta_\rho(\rho)$  zu parametrisieren und damit neue Parameter einzuführen, wird der Korrekturfaktor in die Selbstenergien zurückgerechnet. Mit diesen modifizierten Selbstenergien wird der  $\rho$ -Meson-Nukleon-Vertex neu bestimmt. Die korrigierten Selbstenergien und der zugehörige Fit werden in Abbildung 3.6 gezeigt, die veränderte Parametrisierung der  $\rho$ -Kopplungsfunktion findet man in Tabelle 3.2. Man erkennt in Abbildung 3.4, dass die korrigierten Kopplungen die Zustandsgleichung von Neutronenmaterie sehr gut beschreiben. Dies ist sogar bei sehr hohen Dichten gegeben, wo der statische Fit an die DB-Selbstenergien zu einer viel zu repulsiven Wechselwirkung führt. Dies ist wichtig für die Berechnung von Neutronensternen, wo das Verhalten bei hohen Dichte eine entscheidende Rolle spielt.

Auch die Übereinstimmung der Zustandsgleichung mit DB-Rechnungen bei verschiedenen Asymmetrien ist hervorragend, wie in Abbildung 3.4 beispielhaft für  $a_s = 0.3$  gezeigt wird. Dies gilt besonders im Bereich um die Sättigungsdichte  $\rho_0$ . Da die Kopplungen nur an symmetrische Kernmaterie und Neutronenmaterie angepasst wurden, ist dies eine weitere Rechtfertigung der Annahme, dass Meson-Nukleon-Vertizes unabhängig von der Asymmetrie sein sollten. Dies bestätigt sich auch durch den Vergleich mit DB-Bindungsenergien für andere Werte von  $a_s$ , wird jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in Abbildung 3.4 gezeigt.

Abschließend vergleichen wir in Tabelle 3.3 die Kernmaterieeigenschaften der verschiedenen untersuchten Modelle mit den empirischen Werten aus der Finite-Range-Droplet Systematik (FRDM, erweitertes Tröpfchenmodell) [25]. Die Kompressibilität berechnet sich als

$$K = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\epsilon}{\rho}. \quad (3.49)$$

Sättigungsdichte und Bindungsenergie der impulskorrigierten DDRH-Rechnungen stimmen mit den DB-Ergebnissen aus [32] sehr gut überein. Dies gilt auch für den Symmetrienergiekoeffizienten  $a_4 = 26.1$  MeV, definiert als

$$a_4 = \rho_0^2 \frac{\partial}{\partial (\rho_3)^2} \frac{\epsilon}{\rho}(\rho_0, \rho_3)|_{\rho_3=0}, \quad (3.50)$$

der in Übereinstimmung mit dem DB-Wert von 25 MeV ist, obwohl er bei der Anpassung der Isektorwechselwirkung nicht berücksichtigt wurde.

Es existieren in der Literatur noch andere Ansätze zur Parametrisierung der DB-Ergebnisse. So wurde in [61] die DB-Zustandsgleichung in relativistischer Hartree-Näherung mit konstanten Kopplungen (RMF) (relativistic mean-field) unter Verwendung nichtlinearer  $\sigma$ - und  $\omega$ -Wechselwirkungsterme angepasst. Während dieses Vorgehen die Bindungsenergien symmetrischer Kernmaterie zufriedenstellend beschreiben kann, scheitert es in asymmetrischer Kernmaterie. Der Grund dafür ist die unzureichende Flexibilität der Hartree-Lagrangedichte. In [62] wurde jedoch gezeigt, dass

	DBHF	DDRH	DDRH corr.	FRDM
$\rho_{sat}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	0.182	0.161	0.180	0.153
$\epsilon/\rho$ [MeV]	-15.5	-13.13	-15.60	-16.25
$K$ [MeV]	–	211	282	240
$m^*/M$	–	0.592	0.554	–
$a_4$ [MeV]	25	28.2	26.1	32.7

**Tab. 3.3:** Vergleich der Eigenschaften von unendlicher Kernmaterie, berechnet mit dem Groningen NN-Potential. Ergebnisse werden gezeigt für Rechnungen im DDRH-Modell mit und ohne Impulskorrektur und für die Dirac-Brückner Rechnungen sowie zum Vergleich Parameter des Finite-Range-Droplet Modells (FRDM) [25].

es in relativistischen Hartree-Fock-Rechnungen analog zu unserem dichteabhängigen Hartree-Modell möglich ist, Kernmaterie für verschiedene Asymmetrien erfolgreich zu beschreiben. Dieses Vorgehen besitzt aber den Nachteil, dass es zum einen nur schwer auf endliche Kerne zu übertragen ist, und andererseits die Einteilchenpotentiale bzw. Selbstenergien nicht hinreichend genau beschrieben werden und dadurch der direkte Zusammenhang zur DB-Wechselwirkung abgeschwächt wird.

## 3.6 Zusammenfassung

In diesem Teil der Arbeit wurden die Dirac-Brückner-Theorie und die dichteabhängige relativistische Hadronenfeldtheorie vorgestellt und auf unendliche Kernmaterie angewendet. Wir haben gezeigt, dass es durch die Projektion der DBHF-Selbstenergien auf effektive dichteabhängige Kopplungsfunktionen möglich ist, die DB  $G$ -Matrix zu parametrisieren. Im Gegensatz zu früheren Ansätzen wird jedoch die Identifizierung der Hartree- und DB-Selbstenergien über die makroskopische Bindungsenergie durchgeführt, da das gleiche Vorgehen auf der Ebene der Einteilchenpotentiale wegen der auftretenden Rearrangementenergien die thermodynamische Konsistenz der Theorie verletzen würde.

Die Parametrisierung von Selbstenergien, die in asymmetrischer Kernmaterie aus dem Groningen NN-Potential berechnet wurden, zeigte, dass die Vernachlässigung der Impulsabhängigkeit der Selbstenergien zu einer inkorrekten Beschreibung der Zustandsgleichung führt. Wir haben deshalb impulskorrigierte Kopplungen definiert, die diese Impulsabhängigkeit effektiv parametrisieren und so die Reproduktion der DB-Zustandsgleichung mit hoher Genauigkeit für alle betrachteten Asymmetrieverhältnisse erlauben

Um die Ergebnisse aus unendlicher Kernmaterie auf endliche Systeme abzubilden, müssen die dichteabhängigen Kopplungen als Lorentz-skalare Funktionale der Baryonenoperatoren interpretiert werden. Nur dadurch werden Energie-Impulserhaltung gewährleistet und die zur Veränderung der Einteilchenpotentiale führenden Rearrangementenergien berücksichtigt. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird dies nun anhand stabiler und exotischer Kerne genauer untersucht.





## Teil II

# Exotische Kerne in der dichteabhängigen Feldtheorie



# Kapitel 4

## Eigenschaften endlicher Kerne

In diesem Kapitel untersuchen wir die Bewegungsgleichungen der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie aus Kapitel 2 für endliche Kerne. Die relativistische Hartree-Näherung (RMF) ist erfolgreich zur Beschreibung von endlichen Kernen angewendet worden. Wir zeigen, welche Unterschiede sich in Hartree-Näherung durch die Verwendung der dichteabhängigen Meson-Nukleon-Vertizes im Vergleich zu Rechnungen mit konstanten Kopplungen ergeben. Der Einfluß der dichteabhängigen Kopplungen der  $\rho$ - und  $\delta$ -Mesonen auf die Isektorwechselwirkung ist besonders interessant. Eine nicht-relativistische Reduktion der Dirac-Potentiale ermöglicht es, die Beiträge der einzelnen Mesonen zum Zentral- und zum Spin-Bahn-Potential anschaulich darzustellen.

Kerne mit abgeschlossenen Schalen besitzen sphärische Symmetrie, was die numerische Lösung der Differentialgleichungen erleichtert. Aber auch gerade-gerade Kerne zwischen abgeschlossenen Hauptschalen weisen oft diese Symmetrie auf. Um solche Kerne beschreiben zu können, müssen Paarkorrelationen berücksichtigt werden, die in diesem Kapitel näher beschrieben werden. Danach folgt eine kurze Diskussion der zur Lösung in Hartree-Näherung verwendeten numerischen Methoden. In den nächsten beiden Kapiteln werden diese Ergebnisse dann zur Berechnung stabiler und exotische Kerne verwendet.

### 4.1 Bindungsenergie und Zentralpotentiale

Die Dirac-Gleichung in Hartree-Näherung

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma^\mu) - (M - \Sigma^s)] \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi^n \\ \psi^p \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

lässt sich im statischen Fall als Eigenwertproblem für die Einteilchenenergien  $\epsilon_i^b$  formulieren. Alle benutzten Größen sind hier wie in Abschnitt 2.3 definiert. In endlichen Kernen sind die Felder ortsabhängig. Man findet damit, wenn man Gl. (4.1) isospinsepariert für Protonen und Neutronen schreibt,

$$\left\{ -i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \Sigma_b^0(\mathbf{r}) + \beta(M - \Sigma_b^s(\mathbf{r})) \right\} \psi_i^b(\mathbf{r}) = \epsilon_i^b \psi_i^b(\mathbf{r}). \quad (4.2)$$

Dabei unterscheidet der Index  $b = p, n$  zwischen Protonen und Neutronen. Da beide Nukleonen bei der Lösung der Dirac-Gleichung im Kern unabhängig voneinander behandelt werden können, wird  $b$  im folgenden weggelassen, sofern dies nicht zu Unklarheiten führt. Der Index  $i$  unterscheidet die verschiedenen Eigenwerte und Wellenfunktionen der Nukleonenzustände. Die Matrizen  $\alpha$  und  $\beta$  findet man in Anhang A. Wir definieren weiterhin eine relativistische effektive Masse im Kern als  $m_b^*(\mathbf{r}) = M - \Sigma_b^s(\mathbf{r})$ . Die Lösung von Gl. (4.1) und der zu Gl. (2.41)-(2.45) identischen Mesonenfeldgleichungen wird in Abschnitt 4.3 ausführlich diskutiert.

Aus dem Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  lässt sich analog zu Kapitel 3 die Grundzustandsenergie des Systems bestimmen. Die Berechnung erfolgt wie in Kernmaterie und soll hier nicht genauer erläutert werden. Man findet [38, 63]

$$\begin{aligned}
E_{\text{MF}} &= \sum_{k \in \{i, b\}} v_k^2 (2j_k + 1) \epsilon_k - \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Sigma^{0(r)}(\mathbf{r}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^3r [\rho^s(\mathbf{r}) \Gamma_\sigma(\mathbf{r}) \phi_\sigma(\mathbf{r}) + \rho_3^s(\mathbf{r}) \Gamma_\delta(\mathbf{r}) \phi_\delta(\mathbf{r})] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3r [\rho(\mathbf{r}) \Gamma_\omega(\mathbf{r}) A_0^{(\omega)}(\mathbf{r}) + \rho_3(\mathbf{r}) \Gamma_\rho(\mathbf{r}) A_0^{(\rho)}(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}) e(\mathbf{r}) A_0^{(\gamma)}(\mathbf{r})] \\
&= \sum_{k \in \{i, b\}} v_k^2 (2j_k + 1) \epsilon_k - \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Sigma^{0(r)}(\mathbf{r}) \\
&\quad - \sum_{b=p, n} \frac{1}{2} \int d^3r [\rho_b^s(\mathbf{r}) \Sigma_b^{s(0)}(\mathbf{r}) - \rho_b(\mathbf{r}) \Sigma_b^{0(0)}(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} \int d^3r \rho_p(\mathbf{r}) e A_0^{(\gamma)}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\tag{4.4}$$

Hierbei sind die  $\epsilon_k$  die positiven Energieeigenwerte der Protonen und Neutronen. Die Summe über  $k$  läuft in Wirklichkeit nur über alle Zustände mit Energien, die kleiner oder gleich der Fermienergie bzw. dem chemischen Potential sind, so dass genau  $N$  Neutronen und  $Z$  Protonen im Kern enthalten sind. Ohne Paarung sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $v_k^2$  deshalb als  $v_k^2 = 1$  für  $\epsilon_k \leq \epsilon_{F_b}$  und  $v_k^2 = 0$  für  $\epsilon_k > \epsilon_{F_b}$  definiert. In der im nächsten Abschnitt diskutierten BCS-Näherung kann allerdings  $v_k^2$  Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Der Ausdruck für die Energie entspricht der aus der Hartree-Theorie bekannten Relation, dass die in den Einteilchenenergien enthaltene potentielle Energie aus der Zweiteilchenwechselwirkung wieder zur Hälfte abgezogen werden muss [5]. Neu ist hier jedoch, dass die Rearrangementenergie auftaucht, die laut Kapitel 3 nicht zur Gesamtenergie beitragen sollte. Man kann sich jedoch leicht veranschaulichen, dass die Rearrangementbeiträge in der Dirac-Gleichung die Einteilchenenergien verändern. Dies wird durch die Subtraktion des Rearrangementbeitrages zur potentiellen Energie wieder aufgehoben und das Rearrangement fällt heraus.

Die Schwerpunktenenergie liefert insbesondere für leichte Kerne einen erheblichen Beitrag zur Bindungsenergie und muss zu  $E_{\text{MF}}$  addiert werden. Wir berechnen sie in der gewöhnlich benutzten Näherung durch den nichtrelativistischen harmonischen Oszillator [13]

$$E_{\text{CM}} = -\frac{3}{4} \hbar \omega \quad \text{mit} \quad \hbar \omega = 41 A^{-1/3} \text{MeV}. \tag{4.5}$$

Man kann sich die anschaulicheren Zentral- und Spin-Bahn-Potentiale durch eine nicht-relativistische Reduktion der Dirac-Gleichung berechnen, indem man diese in eine

Schrödinger-äquivalente Gleichung umschreibt [38]. Dies ist sinnvoll, um die isokalaren, die isovektoriellen und die Rearrangementpotentiale separat zu untersuchen, sowie die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu extrahieren. In nicht-relativistischer Näherung findet man für das Zentralpotential

$$U_b^C = \frac{\epsilon_i^b}{M} \Sigma_b^0 - \Sigma_b^s - \frac{1}{2M} (\Sigma_b^{0^2} + \Sigma_b^{s^2}) \approx \Sigma_b^0 - \Sigma_b^s, \quad (4.6)$$

wobei  $\epsilon \approx M \gg \Sigma$  verwendet wurde. Analog ergibt sich für das Spin-Bahn-Potential

$$U_b^{SO} = \frac{1}{2M} \frac{-\partial_r (\Sigma_b^s + \Sigma_b^0)}{\epsilon_i^b + M - (\Sigma_b^s + \Sigma_b^0)} \approx \frac{1}{2M} \frac{-\partial_r (\Sigma_b^s + \Sigma_b^0)}{2M - (\Sigma_b^s + \Sigma_b^0)} \quad (4.7)$$

Man erkennt, dass sich in erster Ordnung das Zentralpotential aus der Differenz des stark attraktiven skalaren Potentials und des stark repulsiven Vektorpotentials berechnet, während das Spin-Bahn-Potential gerade durch die Summe beider Potentiale bestimmt wird. Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Summe der Beiträge des  $\sigma$ - und des  $\omega$ -Mesons in der Einteilchenenergie eines Zustandes und ihre Differenz in der Größe der Spin-Orbit-Aufspaltung des Zustandes manifestiert.

Dies ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber nicht-relativistischen Modellen. Dort arbeitet man in der Regel mit einem Energiefunktional-Ansatz, zu dem die Spin-Bahn-Wechselwirkung phänomenologisch hinzugefügt werden muss. Die Stärke des Spin-Bahn-Potentials ist damit unabhängig von Zentralpotential und muss durch einen Fit an endliche Kerne bestimmt werden. Unter Verwendung eines mikroskopischen Ansatzes lässt sich die Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung auch aus der nicht-relativistische NN-Wechselwirkung extrahieren [64]. Es zeigt sich jedoch, dass der berechnete Wert zu klein ist, so dass man auf die phänomenologisch bestimmte Stärke des Spin-Bahn-Potentials zurückgreift.

Um den Einfluß der dichteabhängigen Isevektorkopplungen genauer untersuchen zu können, spalten wir  $U^C$  in isoskalare und isovektorielle Beiträge auf

$$\begin{aligned} U_b^C &= (\Sigma_0^{0(0)} - \Sigma_0^{s(0)}) + \tau_b (\Sigma_3^{0(0)} - \Sigma_3^{s(0)}) + \Sigma^{0(\tau)} \\ &\equiv U_0^C + \tau_b U_\tau^C + U^R. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Auch die Spin-Bahn-Potentiale für Protonen und Neutronen sind aufgrund der Isospinabhängigkeit der Selbstenergien verschieden. Wir definieren deshalb die isoskalaren und isovektoriellen Potentiale

$$\begin{aligned} U_0^{SO} &= \frac{1}{2} (U_n^{SO} + U_p^{SO}) \\ U_\tau^{SO} &= \frac{1}{2} (U_n^{SO} - U_p^{SO}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

als Maß für die isovektorielle Spin-Bahn-Wechselwirkung. Wir erwarten im Gegensatz zu Rechnungen, die das  $\delta$ -Meson nicht berücksichtigen, eine Verstärkung des Isevektorpotentials  $U_\tau^{SO}$ . In unserem Modell kompensieren sich die Beiträge der  $\delta$ - und  $\rho$ -Mesonen im Zentralpotential  $U_b^C$  zu einem effektiven Isevektorpotential, das in seiner Stärke vergleichbar ist mit Rechnungen, die nur ein effektives  $\rho$ -Meson enthalten. Im Spin-Bahn-Potential hingegen werden die Isevektorselbstenergien der  $\delta$ - und  $\rho$ -Mesonen aufsummiert und verstärken dadurch  $U_\tau^{SO}$ . Dies wird in Kapitel 5 quantitativ untersucht.

## 4.2 Paarkorrelationen

Die Annahme der Hartree-Näherung, dass sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem mittleren Potential bewegen, ist nur bedingt richtig. Aus dem Vergleich von experimentellen Bindungsenergien weiß man, dass die Bindungsenergie eines  $gu$ -Kerns geringer ist als das arithmetische Mittel der Bindungsenergien zweier benachbarter  $gg$ -Kerne. ( $gg$  steht für Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl,  $gu$  für Kerne mit gerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl oder umgekehrt.) Diese und weitere Beobachtungen legen die Vermutung nahe, dass eine zusätzliche kurzreichweitige, attraktive Wechselwirkung zwischen Paaren von Nukleonen existiert.

Während die Hartree(Fock)-Methode nur den Teilchen-Loch-Kanal (particle-hole oder ph) der Wechselwirkung berücksichtigt, lässt sich die oben beschriebene Wechselwirkung durch zusätzliche Teilchen-Teilchen-Korrelationen (particle-particle oder pp) beschreiben, deren Eigenschaften durch den kurzreichweitigen Teil der Wechselwirkung dominiert werden. Diese Teilchen-Teilchen- oder Paarkorrelationen kann man durch die Kopplung zweier Nukleonen in zeitumgekehrten Zuständen zu einem Zustand mit Gesamtdrehimpuls  $J = 0$  (und  $z$ -Projektion  $M = 0$ ) beschreiben. In endlichen Kernen koppeln so zwei Nukleonen mit Drehimpuls  $j$  zu dem Zustand [65]

$$|(jj)(J = M = 0)\rangle = \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}|jm\rangle|j-m\rangle. \quad (4.10)$$

Betrachtet man Korrelationen nur zwischen Protonen und nur zwischen Neutronen, so ist die Paarwechselwirkung durch den Singlett-Even-Kanal (SE) der Wechselwirkung gegeben, da gerade dieser auf das Spin-Singlett  $S = 0$  und das Isospin-Triplett  $T = 1$  projiziert. Es gibt experimentelle Hinweise, dass in  $N = Z$  Kernen auch Proton-Neutron-Pairing eine wichtige Rolle spielt, da sich dort die Valenznukleonen der Protonen und Neutronen in Schalen mit gleichem Drehimpuls befinden. Proton-Neutron-Pairing wird sogar in Kernen mit abgeschlossenen Schalen (z. B.  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{100}\text{Sn}$ ) erwartet und ist ein noch nicht komplett verstandenes Phänomen. Da es zu einer Vermischung der Protonen- und Neutronen-Einteilchenzustände führt, sind praktische Rechnungen sehr kompliziert. Man beschränkt sich daher meistens auf den SE-Kanal der Paarwechselwirkung.

Um die Paarkorrelationen in die Bewegungsgleichungen für die Nukleonen zu integrieren, führt man eine Basistransformation, die Bogoliubov-Transformation, durch [66] und beschreibt den Grundzustand nicht mehr durch die gewöhnlichen Einteilchenwellenfunktionen sondern durch Paare von korrelierten Zuständen, sogenannten Quasiteilchen, die unabhängig voneinander sind. Das Vorgehen zur Bestimmung dieses BCS-Grundzustandes [67] wird z. B. in [5, 65] detailliert beschrieben.

In einer komplett selbstkonsistenten Theorie muss die Berechnung der Paarwechselwirkung durch Projektion der NN-Wechselwirkung auf den SE-Kanal erfolgen, man erhält also für die Paarmatrixelemente

$$V_{jj'}^{\text{Pair}} = \langle (j' m')(j' - m') | V^{SE} | (j m)(j - m) \rangle. \quad (4.11)$$

In nicht-relativistischen Rechnungen mit der phänomenologischen Skyrme- [6, 68, 69] bzw. der Gogny-Wechselwirkung [7] wurde dies erfolgreich durchgeführt. Insbesondere die Gogny-Kraft mit ihrer endlichen Reichweite wird heute erfolgreich eingesetzt,

da ihr p-p-Kanal explizit an Pairing-Gaps endlicher Kerne angepasst wurde. In relativistischen Rechnungen führt der aus der  $G$ -Matrix bzw. den effektiven Kopplungen extrahierte pp-Kanal allerdings zu Pairing-Gaps, die um einen Faktor 2–3 zu groß sind [70, 71]. Es wird argumentiert, dass die Ein-Boson-Austausch-Potentiale nicht korrekt an hohe Impulsüberträge angepasst wurden, und aufgrund diagrammatischer Überlegungen möglicherweise die  $K$ -Matrix anstelle der  $G$ -Matrix im pp-Kanal verwendet werden sollte [16]. Man beschränkt sich daher auf die Verwendung nicht-relativistischer Paarwechselwirkungen. Aufgrund des extrem kurzreichweitigen Charakters lassen sich auch phänomenologische Kontaktwechselwirkungen erfolgreich verwenden [72].

Es gibt zwei Möglichkeiten, Paarungsrechnungen durchzuführen. In der Bogoliubov-Theorie werden der pp- und ph-Kanal der NN-Wechselwirkung gleichberechtigt behandelt und bei der Bestimmung der Eigenzustände berücksichtigt. Dadurch können die Paarkorrelationen direkt auf das unkorrelierte Mittelfeld zurückwirken und so die Einteilchenzustände verändern. Dies ist wichtig für die Beschreibung von Kernen an den Abbruchkanten, wo die Fermienergie in der Nähe des Kontinuums liegt. Durch die Paarkorrelationen können dann die nur sehr schwach gebundenen Zustände in das Kontinuum gestreut werden und mit diesem wechselwirken. Schematisch lassen sich die Hartree-Bogoliubov-Gleichungen als

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_D - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \epsilon_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

schreiben [16, 69], wobei  $h_D$  der Dirac-Hamiltonoperator aus Gl. (4.2) (minus der Nukleonenmasse  $M$ ),  $\hat{\Delta}$  das die Paarwechselwirkung enthaltende Paarfeld und  $\lambda$  das chemische Potential ( $\equiv$  Fermienergie  $\epsilon_F$ ) ist. Die Wellenfunktionen  $v_k$  und  $u_k$  beschreiben die besetzten bzw. unbesetzten Zustände der Quasiteilchen. Dieses Verfahren ist jedoch sehr aufwendig.

Für stärker gebundene Systeme ist es ausreichend, erst die unkorrelierten Hartree-Eigenzustände zu bestimmen und mit diesen nachträglich die Paarkorrelationen zu berechnen. Dieses Verfahren, das den pp- und den ph-Kanal entkoppelt, wird Hartree + BCS Näherung genannt und auch in dieser Arbeit verwendet. Dies ist gerechtfertigt, da wir hauptsächlich an den Eigenschaften unserer mikroskopischen Wechselwirkung und hier insbesondere dem Isevektorkanal interessiert sind.

In der BCS-Näherung müssen mit den Einteilchenenergien  $\epsilon_i$  aus Gl. (4.2) die folgenden Gleichungen separat für Protonen und Neutronen gelöst werden:

$$\Delta_i = -\frac{1}{2} \sum_{i'} (2j_i + 1) V_{ii'}^{\text{Pair}} u_i' v_i', \quad A_b = \sum_i (2j_i + 1) v_i^2 \quad (4.13)$$

Die erste Gleichung definiert den Pairing-Gap  $\Delta_i$ , während die zweite Gleichung die Nebenbedingung der Teilchenzahlerhaltung berücksichtigt ( $A_b = N, Z$ ). Die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $v_i^2$  geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Nukleon in Zustand  $i$  befindet. Sie sind definiert als

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta_i^2}} \right\}, \quad v_i^2 + u_i^2 = 1 \quad (4.14)$$

und reduzieren sich im Fall von  $\Delta_i = 0$  zu  $v_i^2 = \Theta(\epsilon_{F_b} - \epsilon_i)$ , was einem System ohne Paarkorrelation entspricht. Die Berechnung obiger Gleichungen erfolgt selbstkonsistent für das chemische Potential  $\lambda$  und die Pairing-Gaps  $\Delta_i$ . Der Kern erhält dadurch die zusätzliche Paarungs-Energie

$$E_{\text{Pair}} = -\frac{1}{2} \sum_i \Delta_i v_i u_i. \quad (4.15)$$

Die Paar-Wechselwirkung wird oftmals durch ein zustandsunabhängiges Matrixelement  $G \equiv -V_{jj'}^{\text{Pair}}$  angenähert. Dadurch werden auch die Gaps zustandsunabhängig und die Energie vereinfacht sich zu  $E_{\text{Pair}} = -\Delta^2/G$ .

Abschließend soll noch erwähnt werden, dass die Paarkraft nur in Kernen mit nicht abgeschlossenen Schalen eine wichtige Rolle spielt. Ist die Energiedifferenz zwischen zwei abgeschlossenen Schalen größer als der aus den BCS-Gleichungen und der Paar-Wechselwirkung mögliche Gap, tritt kein Pairing auf (Man kann dies auch umgekehrt als Definition für abgeschlossenen Schalen verwenden.). Man nimmt an, dass auch Kerne mit nicht abgeschlossenen Schalen sphärische Symmetrie zeigen. Dies ist eine direkte Folge der kurzreichweitigen Paarkraft, da diese die Nukleonen in zeitumgekehrten Zuständen aneinander streut und so über den gesamten Drehimpulsbereich  $m$  einer Schale gleichmäßig verteilt. Ohne die Existenz einer Paar-Wechselwirkung wäre deshalb der Grundzustand von Kernen mit nicht abgeschlossenen Schalen immer deformiert. Nur Kerne mit doppelt abgeschlossenen Schalen wären noch sphärisch symmetrisch. Experimentell zeigt sich jedoch, dass auch die meisten Kerne mit nur einer abgeschlossenen Schalen sphärische Symmetrie besitzen.

### 4.3 Numerische Realisierung

Die Lösung von Gl. (4.2) lässt sich aufgrund der Radialabhängigkeit der Potentiale bzw. Selbstenergien nicht analytisch bestimmen. Bei sphärisch symmetrischen Kernen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, kann jedoch die Winkelabhängigkeit von der Radialabhängigkeit der Wellenfunktion separiert werden. Man erreicht dies durch den Separationsansatz

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_i(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i m_i}(\theta, \phi) \\ i G_i(r) \mathcal{Y}_{j_i \bar{l}_i m_i}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

der in Anhang B genauer vorgestellt wird. Der Kugelspinor  $\mathcal{Y}$  wird durch den Drehimpuls  $j$ , seine  $z$ -Projektion  $m$  und den Bahndrehimpuls  $l$  charakterisiert, während die nur von der Radialkoordinate  $r$  abhängenden Funktionen  $F$  und  $G$  durch Hauptquantenzahl  $n$  und den Drehimpuls  $j$  definiert werden. Der Winkelanteil kann analytisch bestimmt werden, während man durch Einsetzen in Gl. (4.1) zwei gekoppelte, eindimensionale Differentialgleichungen für  $F$  und  $G$  findet, die für eine gegebene Drehimpulsquantenzahl  $\kappa = \frac{1}{4} \frac{2j+1}{l-j} = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$  numerisch gelöst werden müssen:

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} F_i(r) \\ G_i(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\kappa_i}{r} & m^*(r) - \Sigma^0(r) + \epsilon_i \\ m^*(r) + \Sigma^0(r) - \epsilon_i & \frac{\kappa_i}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i(r) \\ G_i(r) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$



Für die Mesonenfeldgleichungen erhält man bei sphärischer Symmetrie entsprechend die folgenden Differentialgleichungen

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\sigma^2\right) \phi_\sigma(r) = \Gamma_\sigma(\rho(r)) \rho^s(r) \quad (4.18)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\omega^2\right) A_0^{(\omega)}(r) = \Gamma_\omega(\rho(r)) \rho(r) \quad (4.19)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\delta^2\right) \phi_\delta(r) = \Gamma_\delta(\rho(r)) \rho_3^s(r) \quad (4.20)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\rho^2\right) A_0^{(\rho)}(r) = \Gamma_\rho(\rho(r)) \rho_3(r) \quad (4.21)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) A_0^{(\gamma)}(r) = -e \rho_p(r). \quad (4.22)$$

Bei der Lösung obiger Differentialgleichungen ist zu beachten, dass im Gegensatz zu Modellen mit konstanten Kopplungen über die Vertizes integriert werden muss, um die Dichteabhängigkeit konsistent zu behandeln.

Die ortsabhängigen Dichten lassen sich mit den Definitionen aus Gl. (2.28)-(2.31) sofort angeben:

$$\rho(r) = \sum_{k \in \{i,b\}} v_k^2 \frac{2|\kappa_k|}{4\pi r^2} (|G_k(r)|^2 + |F_k(r)|^2) \quad (4.23)$$

$$\rho^s(r) = \sum_{k \in \{i,b\}} v_k^2 \frac{2|\kappa_k|}{4\pi r^2} (|G_k(r)|^2 - |F_k(r)|^2) \quad (4.24)$$

$$\rho_3(r) = \sum_{k \in \{i,b\}} v_k^2 \frac{2|\kappa_k|}{4\pi r^2} (|G_k(r)|^2 + |F_k(r)|^2) \tau_b \quad (4.25)$$

$$\rho_3^s(r) = \sum_{k \in \{i,b\}} v_k^2 \frac{2|\kappa_k|}{4\pi r^2} (|G_k(r)|^2 - |F_k(r)|^2) \tau_b \quad (4.26)$$

$$\rho_p(r) = \sum_{k \in \{i,b\}} v_k^2 \frac{2|\kappa_k|}{4\pi r^2} (|G_k(r)|^2 + |F_k(r)|^2) \frac{1 - \tau_b}{2} \quad (4.27)$$

Die numerische Realisierung der Rechnung erfordert die selbstkonsistente Lösung der Gleichungen (4.17) und (4.18)-(4.22). Man startet mit vorgegebenen skalaren und vektoriellen Selbstenergien bzw. Potentialen, für die eine Woods–Saxon–Form

$$\Sigma^{0,s}(r) = \Sigma^{0,s}(0) \left[1 + e^{\frac{r-r_s}{a}}\right]^{-1} \quad (4.28)$$

mit

$$\begin{aligned} \Sigma^s(0) &= -395 \text{ MeV}, & \Sigma^0(0) &= 320 \text{ MeV} \\ a &= 0.545 \text{ fm}, & r_s &= r_0 A^{1/3}, & r_0 &= 1.07 \text{ fm} \end{aligned}$$

angenommen wird. Die Beiträge der Isovektormesonen werden im ersten Iterationsschritt vernachlässigt. Danach werden iterativ die Dirac–Gleichung inklusive BCS–Paarkorrelation und die Mesonenfeldgleichungen gelöst und die jeweiligen Nukleonendichten und Selbstenergien entsprechend neu berechnet. Konvergenzkriterium ist, dass

die relative Änderung der Mesonenfelder und Einteilchenenergien zwischen zwei Iterationsschritten  $< 10^{-4}$  ist.

Numerisch ist es vorteilhaft, die Dirac-Gleichung durch Diagonalisierung des Hamiltonoperators in einer beliebigen vollständigen Basis zu lösen. Dazu werden die Wellenfunktionen in der Regel nach Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators entwickelt und die entsprechenden Matrixelemente berechnet. Man erhält die Eigenwerte- und zustände dann durch Diagonalisierung der entsprechenden Matrix. Dieses Verfahren ermöglicht auch die einfache Behandlung der nichtlokalen Austausch-Terme und beschreibt leichte Kerne erfolgreich. Es ist allerdings problematisch bei der Berechnung schwerer Kerne und insbesondere von Kontinuumszuständen, da hier eine sehr große Anzahl von Basiszuständen benötigt wird, um die exakte Wellenfunktion mit ausreichender Genauigkeit anzunähern.

Aus diesem Grund erfolgt die Lösung der Differentialgleichungen direkt im Ortsraum. Herkömmliche Ansätze verwenden die Shooting-Methode, bei der man vom Kerninnern  $r = 0$  fm und vom Boxradius  $r_{max}$  startend integriert und an dem sogenannten Matching-Point beide Lösungen aneinander anpaßt. Da keine Basisentwicklung notwendig ist, erhält man so die exakte Lösung der Wellenfunktion. Allerdings wird das Verfahren bei Verwendung nichtlokaler Potentiale sehr aufwendig. Außerdem muss die Lösung der Differentialgleichungen für gebundene und Kontinuumszustände separat erfolgen. Wir berechnen deshalb die Lösung im Ortsraum mit der Methode der Finiten-Elemente, die die Vorteile der Shooting-Methode mit der leichten Anwendbarkeit der Basisentwicklung vereint. Eine genauere Beschreibung dieses Verfahrens findet man in [73, 74, 75]. Dazu unterteilt man den Ortsraum in äquidistante Unterabschnitte (Finite-Elemente), in denen die Wellenfunktion nach einem vollständigen Basissystem entwickelt wird. Man benutzt dazu die sogenannten „Shape-Funktionen“  $n$ -ter Ordnung, für die hier die Lagrange-Polynome verwendet werden [76]. Daraus werden durch Gauss-Integration „lokale“ Matrixelemente bestimmt, die zu einer Bandmatrix zusammengesetzt werden. Diese wird wiederum diagonalisiert und man erhält so die Eigenwerte und Eigenfunktionen. Dieses Verfahren führt zu einer mit der Qualität der Shooting-Methode vergleichbaren Beschreibung der Wellenfunktionen und erlaubt zusätzlich eine einfache Diskretisierung des Kontinuums.

Das in dieser Arbeit benutzte Computerprogramm wurde in C++ geschrieben und basiert auf einem in [76, 77] veröffentlichten Entwurf zur Berechnung von doppelt magischen Kernen in relativistischer Hartree-Näherung mit konstanten Kopplungen. Es wurde für die vorliegenden Rechnungen komplett überarbeitet und erweitert. Für praktische Rechnungen ist es ausreichend, einen Boxradius von  $r_{max} = 20$  fm zu wählen, und diesen unter Verwendung von Shape-Funktionen 4-ter Ordnung in 25 Finite-Elemente zu unterteilen. Man erreicht so eine Genauigkeit von 1 keV in den Einteilchenenergien. Verglichen mit Rechnungen, die die Shooting-Methode verwenden, entspricht dies 101 Knotenpunkten, also einer äquivalenten Schrittweite von 0.1 fm. Die Beschreibung gebundener Zustände ist hervorragend. Es zeigt sich jedoch, dass im Kontinuum teilweise unphysikalische spuriose Zustände auftreten. Diese lassen sich jedoch durch eine höhere Ordnung der Shape-Funktionen vermeiden sowie durch Überprüfung der Wellenfunktion herausfiltern.

In den nächsten beiden Kapiteln werden Ergebnisse dieser Rechnungen für stabile und exotische Kerne vorgestellt und diskutiert.

# Kapitel 5

## Ergebnisse für doppelt magische Kerne

In diesem Kapitel wird die in Teil I dieser Arbeit vorgestellte dichteabhängige Hadronenfeldtheorie in relativistischer Hartree-Näherung auf endliche Kerne angewendet. Als ersten Test für die in Kapitel 3 bestimmte dichteabhängige Parametrisierung des Groningen NN-Potentials untersuchen wir Kerne mit abgeschlossenen Schalen, die sogenannten magischen Kerne. Die doppelt magischen Kerne  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{100}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  und  $^{208}\text{Pb}$  besitzen stark ausgeprägte Abschlüsse für Schalen mit 8, 20, 50, 82 und 126 Protonen oder Neutronen. Zusätzlich berechnen wir die Kerne  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ni}$ ,  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{68}\text{Ni}$  und  $^{90}\text{Zr}$ . Diese besitzen für 28 oder 40 Nukleonen einen etwas schwächeren Schalenabschluss und werden deshalb auch als halbmagisch bezeichnet. Die Bindungsenergien der betrachteten Kerne wurden bis auf die der extrem protonenreichen Isotope mit hoher Genauigkeit experimentell bestimmt [78]. Die Bindungsenergie von  $^{100}\text{Sn}$  wurde mit einem relativ großen Fehler gemessen [79], und die des erst vor kurzem erstmals im Experiment beobachteten  $^{48}\text{Ni}$  konnte aufgrund der geringen Anzahl der produzierten Kerne noch nicht zuverlässig bestimmt werden [80]. Es ist jedoch möglich, die Bindungsenergie in guter Näherung aus der Systematik von Spiegelkernen ( $N \leftrightarrow Z$ ) aus der Bindungsenergie­differenz zu  $^{48}\text{Ca}$  zu extrapolieren [81].

Die betrachteten Kerne decken einen sehr breiten Bereich der Nuklidkarte (Abbildung 1) ab und bestehen sowohl aus stabilen als auch durch  $\beta$ -Zerfall instabilen Kernen. Ihre experimentell gemessenen Eigenschaften werden in Tabelle 5.1 dargestellt. Durch die Betrachtung von Kernen, die die gesamte Bandbreite von der Protonenabbruchkante bis zu sehr neutronenreichen Isotopen abdecken, ist es möglich, die Eigenschaften der in unendlicher Kernmaterie bestimmten dichteabhängigen Wechselwirkung, detailliert zu untersuchen.

### 5.1 Zentralpotential und dichteabhängige Kopplungen

Das durch die dichteabhängigen Meson-Nukleon-Vertizes unterschiedliche Verhalten der Hartree-Potentiale im Vergleich zu Rechnungen mit konstanten Kopplungen ist

	<sup>16</sup> O	<sup>40</sup> Ca	<sup>48</sup> Ca	<sup>90</sup> Zr	<sup>208</sup> Pb
$r_c$ [fm]	2.74	3.48	3.47	4.27	5.50
$E/A$ [MeV]	7.98	8.55	8.67	8.71	7.87
	<sup>48</sup> Ni	<sup>56</sup> Ni	<sup>68</sup> Ni	<sup>100</sup> Sn	<sup>132</sup> Sn
$E/A$ [MeV]	7.27	8.64	8.68	8.26	8.26

**Tab. 5.1:** Experimentelle Werte mittlerer Ladungsradien und Bindungsenergien pro Nukleon für (halb)magische Kerne. Die Daten stammen aus [81, 78, 79, 82]

besonders interessant. Um dies systematisch untersuchen zu können, beschränken wir uns nicht nur auf die in Kapitel 3 vorgestellte Parametrisierung des Groningen NN-Potentials sondern betrachten zusätzlich eine in [36] vorgestellte dichteabhängige Parametrisierung des Bonn A NN-Potentials [3]. Diese wurde aus in symmetrischer Kernmaterie berechneten DB-Selbstenergien [29] bestimmt, bis jetzt jedoch nur zur Untersuchung einiger weniger magischer Kerne verwendet [38, 39, 41]. Nur die  $\sigma$  und  $\omega$  Meson-Nukleon-Vertizes, die mit dem in Gl. (3.41) vorgestellten Polynomansatz parametrisiert wurden, sind dichteabhängig. Die entsprechenden Parameter sind in Tabelle 5.2 angegeben. Die Isevektorwechselwirkung wird nur durch das  $\rho$ -Meson beschrieben, für das eine Masse von  $m_\rho = 770$  MeV und eine konstante Kopplungsstärke von  $g_\rho^2/4\pi = 5.19$  gewählt wurde.

In Abbildung 5.1 wird der Verlauf der Kopplungsstärke exemplarisch in dem  $N = Z$  Kern <sup>40</sup>Ca und dem neutronenreichen Kern <sup>132</sup>Sn gezeigt. Die dichteabhängigen Kopplungen des Groningen und des Bonn A Parametersatzes zeigen im Kerninnern einen flachen Verlauf, da sich dort die Kerndichte nur wenig ändert. Im Zentrum dieser Kerne herrscht eine Dichte von  $\rho(0) \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , dementsprechend besitzen die Kopplungen in etwa den gleichen Wert, den man auch am Sättigungspunkt  $\rho_0$  von unendlicher Kernmaterie findet. <sup>40</sup>Ca hat im Zentrum eine etwas höhere Dichte  $\rho(0) > \rho_0$ , was im Vergleich zu <sup>132</sup>Sn zu einer Reduzierung der Kopplungsstärke führt. Für das  $\delta$ -Meson registriert man einen Anstieg der Kopplungsstärke im Kerninnern. Dieses im Vergleich zu den anderen Mesonen umgekehrte Verhalten resultiert aus dem Anstieg der Kopplungsstärke für höhere Dichten  $\rho(0) > \rho_0$ , der schon in Kernmaterie beobachtet wurde (Abbildung 3.3).

Meson $\alpha$	$m_\alpha$ [MeV]	$a_\alpha$ [GeV <sup>-2</sup> ]	$b_\alpha$	$c_\alpha$	$\zeta_\alpha$
$\sigma$	550	281.715	1.2102	1.6277	-0.0030
$\omega$	783	203.055	1.2889	1.7771	-0.0015
$k_{F_0} = 1.4 \text{ [fm}^{-1}\text{]}$					

**Tab. 5.2:** Dichteabhängige Kopplungen und Impulskorrekturfaktoren für das Bonn A NN-Potential. Die Parameter für die Kopplungen aus Gl. (3.41) stammen aus [38] und wurden in [36] durch einen Fit an DB-Selbstenergien aus symmetrischer Kernmaterie bestimmt [29].

An der Kernoberfläche beobachtet man für beide Parametrisierungen einen starken Anstieg der Kopplungen, der von der dortigen schnellen Dichteabnahme erzeugt wird. Im Gegensatz dazu bleibt die Kopplungsstärke in Modellen mit konstanten Kopplungen unverändert. Dies erkennt man hier beispielhaft an der  $\rho$ -Kopplung der Bonn A Parametrisierung. Es wurde schon erwähnt, dass solche Modelle zur verbesserten Beschreibung der Oberfläche nichtlineare Mesonen-Wechselwirkungsterme einführen müssen, die in unendlicher Kernmaterie auch als dichteabhängige Kopplungen interpretiert werden können, in endlichen Kernen jedoch zu einer Modifikation der Mesonenfelder führen. Das die Kerneigenschaften bestimmende Einteilchenpotential ist jedoch genau das Produkt aus Mesonenfeld und Kopplungskonstante. Deshalb ist auch sofort aus Abbildung 5.1 ersichtlich, warum dichteabhängige Modelle zur Beschreibung der Oberflächeneigenschaften keine Nichtlinearitäten in den Feldern benötigen: Die benötigte lokale Änderung der Potentiale wird durch den Anstieg der Kopplungsstärke der Vertizes erzeugt.

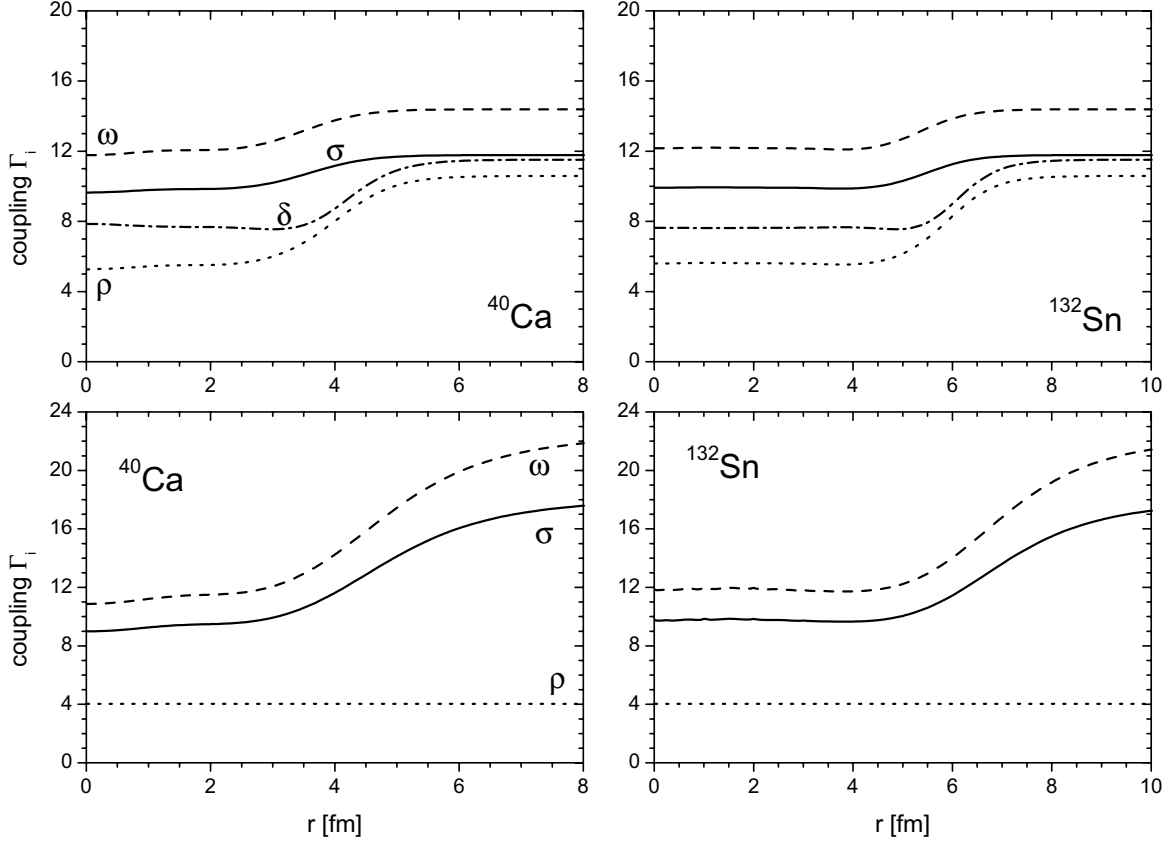
Der Vergleich zwischen der beiden Parametrisierungen zeigt, dass der Bonn A Parametersatz eine wesentlich stärkere Dichteabhängigkeit besitzt, die sich direkt auf die unterschiedliche Wahl der Fitfunktionen (Gl. (3.41) bzw. Gl. (3.42)) zurückführen lässt. So ändert sich z.B. für das Groningen Potential die Stärke der  $\omega$ -Kopplungen im Kern nur um etwa 20% (von 12 auf 14.5 für  $^{40}\text{Ca}$ ), während die Änderung für das Bonn A Potential fast 100% beträgt (von 11 auf 22).

Man erwartet aufgrund dieser starken Änderung auch direkte Auswirkungen auf die Einteilchenpotentiale. Die Zentralpotentiale werden in Abbildung 5.2 gezeigt. Die entsprechenden Größen wurden in Gl. (4.8) definiert. Insgesamt ist der Verlauf des isoskalaren Potentials  $U_0^C$  für die Bonn A Parametrisierung flacher und die Kernoberfläche zu größeren Radien verschoben, was in Analogie mit dem Verhalten der Kopplungen steht. Man erkennt auch, dass die stärkere Dichteabhängigkeit im Vergleich zur Groningen Parametrisierung zu einem wesentlich repulsiveren Rearrangement-Potential  $U^R$  führt. Interessant ist auch der Vergleich des Isektorpotentials  $U_\tau^C$  beider Parametrisierungen, welches in dem isospin-symmetrischen Kern  $^{40}\text{Ca}$  wie erwartet verschwindet. In  $^{132}\text{Sn}$  zeigt die dichteabhängige Isektorwechselwirkung im Vergleich zu dem von der konstanten  $\rho$ -Kopplung erzeugten Potential ein fluktuierendes Verhalten. Dies kann durch die Schalenstruktur dieses sehr neutronenreichen Kerns erklärt werden, die dazu führt, dass der relative Unterschied zwischen Protonen- und Neutronendichten variiert. Zusammen mit der unterschiedlichen Dichteabhängigkeit der  $\delta$ - und  $\rho$ -Vertizes (siehe Abbildung 5.1) führt dies sogar zu einem lokal negativen Isektorpotential im Zentrum.

Die Auswirkungen des beobachteten Verhaltens auf experimentell messbare Observablen wie Bindungsenergien und Ladungsradien wird im nächsten Abschnitt untersucht.

## 5.2 Bindungsenergien und Ladungsradien

Wir definieren zunächst zum Vergleich mit anderen Ergebnissen die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon. Diese berechnet sich unter Berücksichtigung der Schwerpunktkor-



**Abb. 5.1:** Dichteabhängigkeit der effektiven Kopplungen der Groningen (oben) und Bonn A (unten) Parametrisierung in endlichen Kernen ( $^{40}\text{Ca}$  und  $^{132}\text{Sn}$ ). Die Bonn A Parametrisierung besitzt nur im isoskalaren Kanal ( $\sigma$  und  $\omega$ ) mediumabhängige Kopplungen.

rektur und der Paarwechselwirkung aus der Hartree–Grundzustandsenergie, Gl. (4.4), mittels

$$E_b/A = (E_{\text{MF}} + E_{\text{CM}} + E_{\text{Pair}})/A - M. \quad (5.1)$$

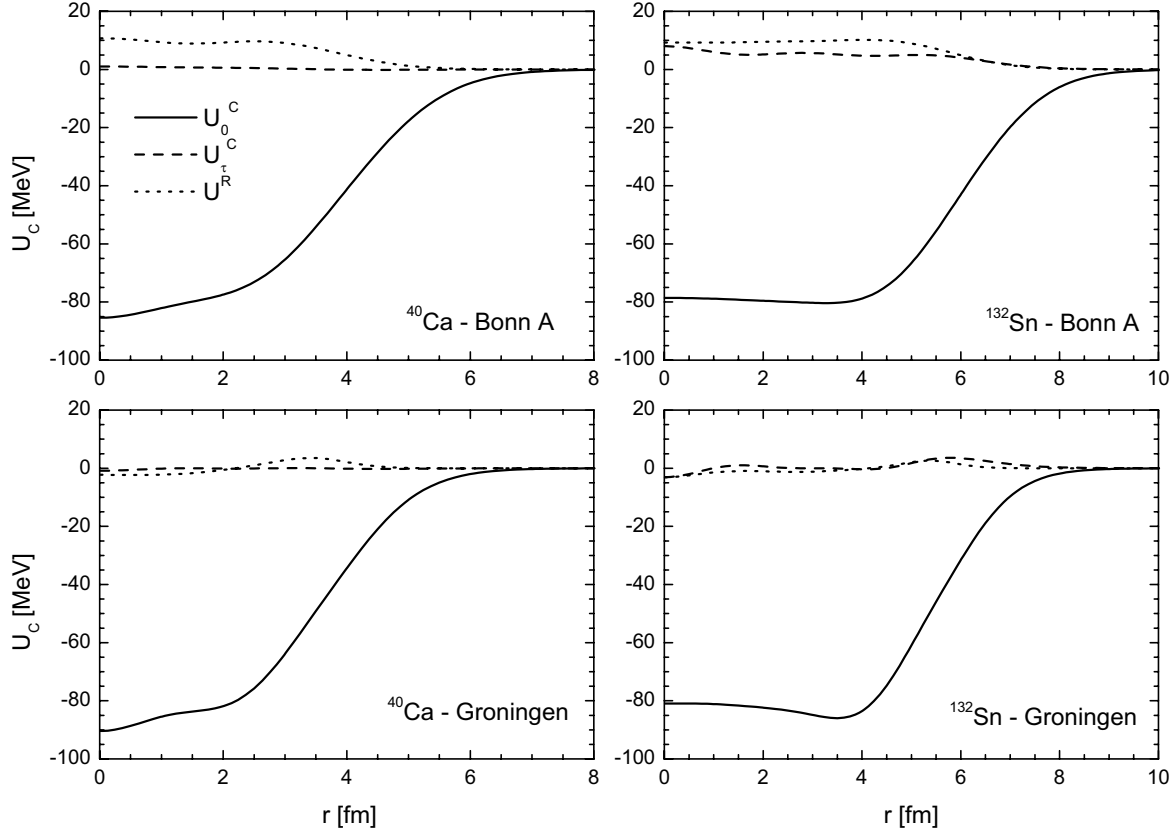
Die Ladungsdichte  $\rho_c(r)$  eines Nukleons wird durch Faltung der Protonendichte  $\rho_p(r)$  mit dem Protonen–Formfaktor  $g(r)$  berechnet [68]. Dieser wird als Gaussverteilung mit einem Protonenradius von  $r_c^p = 0.8$  fm angenommen. Mit der Definition  $r_0 = \sqrt{2/3}r_c^p$  erhält man dann die Relation

$$\rho_c(r) = \int d^3r' \rho_p(r) g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad g(r) = \frac{e^{-(r/r_0)^2}}{(r_0\sqrt{\pi})^3}. \quad (5.2)$$

Der Ladungsradius berechnet sich damit als

$$r_c^2 = \frac{1}{Z} \int d^3r r^2 \rho_c(r) \quad (5.3)$$

und die mittleren Radien (rms - root mean square) des Kerns bzw. der Neutronen und Protonen erhält man mit den entsprechend Dichten analog zu obiger Formel.

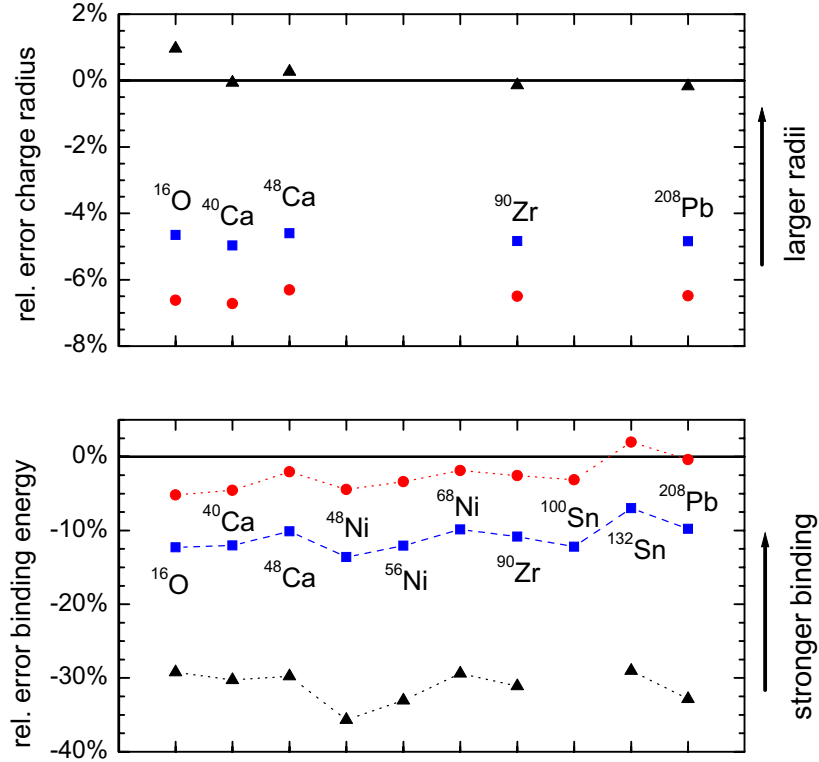


**Abb. 5.2:** Isoskalare (durchgezogene Linie) und isovektorielle Zentralpotentiale (gestrichelte Linie) der Groningen (unten) und Bonn A (oben) Parametrisierung in endlichen Kernen ( $^{40}\text{Ca}$  und  $^{132}\text{Sn}$ ). Die gepunktete Linie zeigt das Rearrangementpotential, welches immer entgegengesetzt zum Zentralpotential wirkt.

In Tabelle 5.3 zeigen wir Ergebnisse für Kerne mit abgeschlossenen Schalen, die mit der Groningen Parametrisierung berechnet wurden. In Abbildung 5.3 werden die entsprechenden relativen Fehler für Ladungsradien und Bindungsenergien im Vergleich zu experimentellen Daten dargestellt. Diese sind definiert als

$$\Delta\rho_c = \frac{\rho_c - \rho_c^{\text{exp}}}{\rho_c^{\text{exp}}}, \quad \Delta E = \frac{E_B - E_B^{\text{exp}}}{E_B^{\text{exp}}} \quad (5.4)$$

Man erkennt, dass die statische Parametrisierung der Vertizes, die ohne Impulsanpassung direkt aus den Selbstenergien bestimmt wurde, nicht in der Lage ist, die experimentellen Daten zufriedenstellend zu beschreiben. Während die Ladungsradien überraschend gut mit den experimentellen Werten übereinstimmen, sind alle Kerne viel zu schwach gebunden. Der relative Fehler liegt bei etwa 30% und die Protonenabbruchkante wird aufgrund der schwachen Bindung der Protonen so früh erreicht, dass  $^{100}\text{Sn}$  nicht mehr gebunden ist. Dies war jedoch von den Ergebnissen für unendliche Kernmaterie aus Kapitel 3 zu erwarten, wo eine um fast 3 MeV zu geringe Bindungsenergie am Sättigungspunkt gefunden wurde.

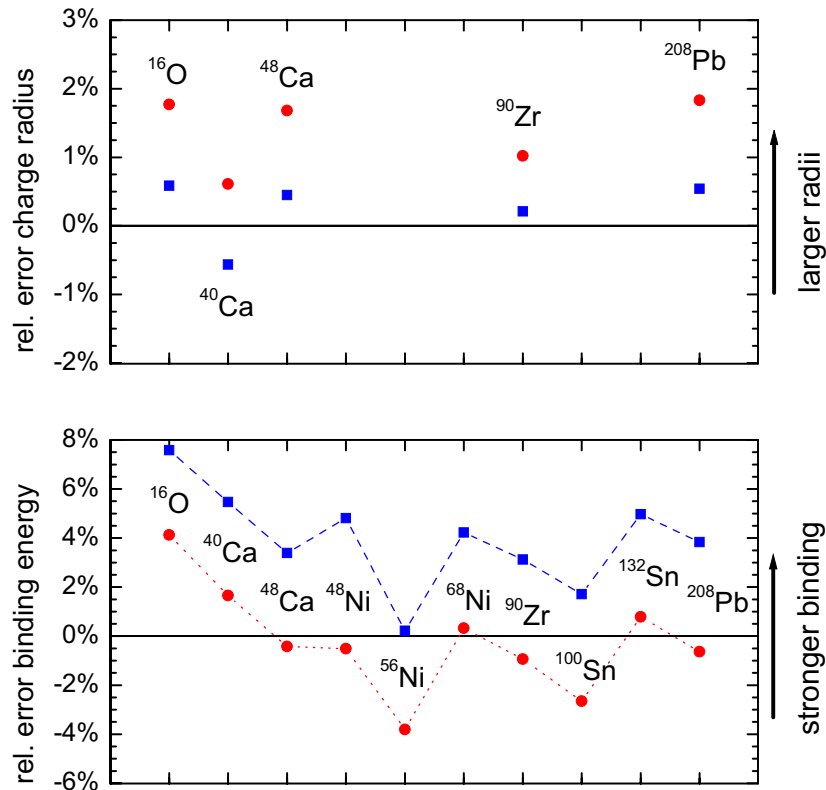


**Abb. 5.3:** Relative Fehler der Ladungsradien (oben) und Bindungsenergien (unten) berechnet mit der Groningen Parametrisierung. Gezeigt werden Ergebnisse für magische und (halb)magische Kerne. Ergebnisse ohne Impulskorrektur werden durch Dreiecke, Ergebnisse für  $\zeta_\sigma = 0.00804 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = 0.00103 \text{ fm}^{-2}$  (angepaßt an Kernmaterie) durch Quadrate und Ergebnisse für  $\zeta_\sigma = 0.008 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = -0.002 \text{ fm}^{-2}$  (angepaßt an endliche Kerne) durch Kreise dargestellt. Die Linien dienen der besseren Übersicht.

Wenn wir jedoch die impuls-korrigierten Kopplungen aus Kapitel 3 verwenden, erhalten wir stark verbesserte Ergebnisse. Obwohl die Bindungsenergien immer noch um etwa 10% unterschätzt werden, ist die Veränderung im Vergleich zur statischen Parametrisierung doch bemerkenswert. Man beobachtet zwar eine Reduktion der Ladungsradien, aber mit einem Fehler von ungefähr 4% ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sehr zufriedenstellend.

Zum Vergleich wurden auch Rechnungen mit der Parametrisierung des Bonn A NN-Potentials durchgeführt, deren Ergebnisse in Tabelle 5.4 zu finden sind. Die relativen Fehler (Abbildung 5.4) sind sowohl für die Bindungsenergien als auch für die Ladungsradien kleiner als bei der Groningen Parametrisierung. Die Ursache dafür liegt in den unterschiedlichen NN-Potentials. Die Bonn A Parametrisierung besitzt in Kernmaterie bei einer Sättigungsdichte von  $\rho_0 = 0.162 \text{ fm}^{-3}$  eine Bindungsenergie von ungefähr  $-16.3 \text{ MeV}$ . Das Minimum der Groningen Wechselwirkung hingegen ist zu höheren Dichten verschoben und die Sättigungsenergie beträgt nur  $-15.6 \text{ MeV}$ . Diese Eigenschaften manifestieren sich offensichtlich direkt in endlichen Kernen, was dazu führt,





**Abb. 5.4:** Analog 5.3, jedoch für Ergebnisse mit der Bonn A Parametrisierung aus [36, 38]. Ergebnisse ohne Impulskorrektur werden durch Quadrate und Ergebnisse für  $\zeta_\sigma = -0.003 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = -0.0015 \text{ fm}^{-2}$  durch Kreise dargestellt.

dass das Groningen Potential die Bindungsenergien unterschätzt. Die zu hohe Sättigungsdichte führt zu einem tieferen Potential und einer höheren Nukleonendichte im Kerninnern. Dies lokalisiert die Protonen stärker im Zentrum des Kerns und führt damit zu den zu kleinen Ladungsradien. Um die Ergebnisse für endliche Kerne weiter zu verbessern, sind deshalb zuerst Verbesserungen bei den Brückner-Rechnungen und den NN-Potentialen notwendig.

Es stellt sich die Frage, wie empfindlich die Ergebnisse für endliche Kerne auf die Impulskorrektur reagieren. Insbesondere ist es interessant zu untersuchen, ob sich die Ergebnisse durch Veränderung der Impulskorrekturfaktoren  $\zeta_\alpha$  verbessern lassen. Es wurde kein Versuch unternommen, die Parameter so zu optimieren, dass die experimentellen Daten perfekt beschrieben werden. Vielmehr wurden die isovektoriellen Kopplungen unverändert gelassen und darauf geachtet, dass die Zustandsgleichung für symmetrische Kernmaterie noch hinreichend gut beschrieben wird.

Die Impulskorrekturfaktoren  $\zeta_\sigma = 0.008 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = -0.002 \text{ fm}^{-2}$  erlauben eine gute Beschreibung der Bindungsenergien und Ladungsradien. Diese Korrektur entspricht im Wesentlichen einer Abschwächung der Vektorselbstenergie im Vergleich zu der ursprünglichen Parametrisierung aus Kernmaterie. Es zeigt sich, dass auch andere

Modifikationen zu ähnlichen Ergebnissen führen. Es sollte jedoch bemerkt werden, dass sich die Interpretation der Impulskorrektur, die in Kapitel 3 für unendliche Kernmaterie eingeführt wurde, nur teilweise auf die in endlichen Kernen bestimmten  $\zeta_\alpha$  übertragen lässt. Die direkte Beziehung zur Impulsabhängigkeit  $\Sigma'/\Sigma^{\text{DB}}$  der Selbstenergien bleibt nicht mehr erhalten. Es ist offensichtlich, dass in endlichen Kernen implizit Korrekturterme höherer Ordnung berücksichtigt werden. Insbesondere werden durch die  $\zeta_\alpha$  die Unzulänglichkeiten der NN-Potentiale ausgeglichen, die eine korrekte Beschreibung der Bindungsenergien endlicher Kerne verhindern. Man kann dies deutlich am umgekehrten Vorzeichen von  $\zeta_\omega$  im Vergleich zu dem Wert in Kernmaterie sehen. Die  $\zeta_\alpha$  müssen also bei dieser Vorgehensweise eher als phänomenologische Korrekturfaktoren verstanden werden.

Ergebnisse werden in Tabelle 5.3 und Abbildung 5.3 gezeigt. Man erkennt, dass die Ladungsradien leicht weiter reduziert werden, dafür jedoch die Bindungsenergien mit einer Abweichung  $< 4\%$  von den experimentellen Werten sehr zufriedenstellend beschrieben werden. Im allgemeinen führt eine Zunahme der Bindungsenergie zu kleineren Ladungsradien, so dass es nicht möglich ist, mit der Groningen Parametrisierung beide Observable gleichzeitig korrekt zu beschreiben. Eine Verbesserung der Ergebnisse könnte erreicht werden, indem man die Masse des  $\sigma$ -Mesons durch einen Fit an die Ladungsradien endlicher Kerne bestimmen würde. Diese ist aufgrund der breiten  $\sigma$ -Resonanz nicht exakt bekannt. Ein phänomenologischer Fit an experimentelle Daten ist jedoch nicht das Ziel dieser Untersuchungen, vielmehr soll die mikroskopische Wechselwirkung genauer untersucht werden.

Die gleiche Anpassung der Impulskorrekturfaktoren an endliche Kerne wurde auch für das Bonn A NN-Potential durchgeführt. Hier führen die Werte  $\zeta_\sigma = -0.0030 \text{ fm}^{-2}$  und  $\zeta_\omega = -0.0015 \text{ fm}^{-2}$  zu einer sehr guten Übereinstimmung mit den experimentellen Bindungsenergien ohne die guten Ergebnisse für die Ladungsradien zu beeinträchtigen. Nur für einige  $N = Z$  Kerne gibt es größere Abweichungen, was sich möglicherweise zum Teil auf die nicht berücksichtigten Proton-Neutron-Paarkorrelationen zurückführen lässt. Ergebnisse werden in Tabelle 5.4 und Abbildung 5.4 gezeigt. Man erkennt das gleiche systematische Verhalten wie beim Groningen NN-Potential: Jetzt führt eine Reduzierung der Bindungsenergie zu einer Überschätzung der Ladungsradien.

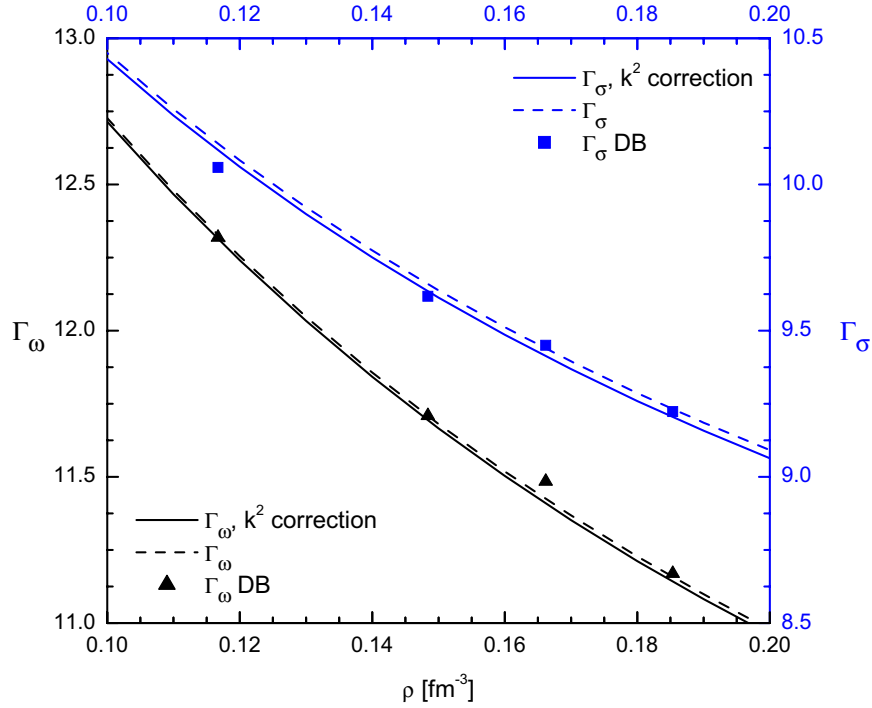
Es ist interessant zu untersuchen, wie sich die Impulskorrektur für endliche Kerne auf die Zustandsgleichung unendlicher Kernmaterie auswirkt. Aus diesem Grund wurden die Sättigungseigenschaften für die verschiedenen Modelle berechnet (Tabelle 5.5). Man erkennt eine Verschiebung des Sättigungspunktes entlang der Coester-Linie, aber die Übereinstimmung mit den systematischen Werten ist für alle Modelle zufriedenstellend. Andererseits sind die Symmetrieenergie, die Kompressibilität und die effektive Masse relativ unabhängig von der Impulskorrektur. Man erkennt auch aus den Abbildungen 5.3 und 5.4, dass die Impulskorrektur lediglich zu einer Verschiebung der relativen Fehler führt, die fast identisch für alle betrachteten Kerne ist. Die Ursache dafür ist, dass die grundlegenden Eigenschaften der Wechselwirkung durch die Impulskorrektur nicht verändert werden können – diese werden nur durch die Dichteabhängigkeit der Vertizes bestimmt. Auch wurde die Isektorwechselwirkung nicht modifiziert.

Groningen	$\zeta_\sigma = 0.0$		$\zeta_\sigma = 0.00804 \text{ fm}^{-2}$		$\zeta_\sigma = 0.008 \text{ fm}^{-2}$	
	$\zeta_\omega = 0.0$		$\zeta_\omega = 0.00103 \text{ fm}^{-2}$		$\zeta_\omega = -0.002 \text{ fm}^{-2}$	
	$r_c$	$E/A$	$r_c$	$E/A$	$r_c$	$E/A$
$^{16}\text{O}$	2.76	5.65	2.61	7.00	2.56	7.56
$^{40}\text{Ca}$	3.47	5.96	3.30	7.52	3.24	8.16
$^{48}\text{Ca}$	3.48	6.09	3.31	7.79	3.25	8.49
$^{90}\text{Zr}$	4.26	6.00	4.06	7.77	3.99	8.49
$^{208}\text{Pb}$	5.49	5.28	5.24	7.10	5.15	7.84
$^{48}\text{Ni}$	3.77	4.68	3.54	6.28	3.46	6.95
$^{56}\text{Ni}$	3.73	5.78	3.53	7.60	3.46	8.35
$^{68}\text{Ni}$	3.88	6.13	3.69	7.83	3.63	8.52
$^{100}\text{Sn}$	(4.46)	(5.42)	4.24	7.25	4.16	8.00
$^{132}\text{Sn}$	4.69	5.86	4.47	7.68	4.40	8.42

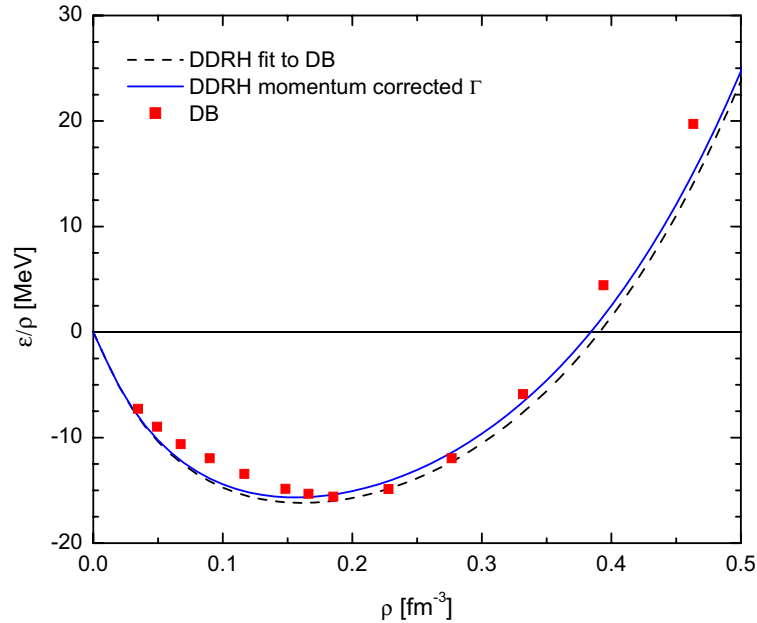
**Tab. 5.3:** Mittlere Ladungsradien  $r_c$  [fm] und Bindungsenergien pro Nukleon  $E_B/A$  [MeV] (halb)magischer Kerne, berechnet in DDRH-Näherung mit dem Groningen NN-Potential. Gezeigt werden Ergebnisse für verschiedene Impulskorrekturenfaktoren  $\zeta_\sigma$  und  $\zeta_\omega$  (siehe Text für genauere Erklärungen der Parameter). Die Werte für  $^{100}\text{Sn}$  sind eingeklammert, da nicht mehr alle Protonen gebunden sind.

Bonn A	$\zeta_\sigma = 0.0$		$\zeta_\sigma = -0.0030 \text{ fm}^{-2}$	
	$\zeta_\omega = 0.0$		$\zeta_\omega = -0.0015 \text{ fm}^{-2}$	
	$r_c$	$E/A$	$r_c$	$E/A$
$^{16}\text{O}$	2.75	8.58	2.79	8.30
$^{40}\text{Ca}$	3.46	9.02	3.50	8.69
$^{48}\text{Ca}$	3.49	8.96	3.53	8.63
$^{90}\text{Zr}$	4.26	8.98	4.31	8.63
$^{208}\text{Pb}$	5.53	8.17	5.60	7.82
$^{48}\text{Ni}$	3.84	7.62	3.89	7.31
$^{56}\text{Ni}$	3.79	8.66	3.84	8.31
$^{68}\text{Ni}$	3.88	9.05	3.93	8.71
$^{100}\text{Sn}$	4.51	8.40	4.57	8.04
$^{132}\text{Sn}$	4.74	8.67	4.78	8.32

**Tab. 5.4:** Mittlere Ladungsradien  $r_c$  [fm] und Bindungsenergien  $E_b/A$  [MeV] pro Nukleon (halb)magischer Kerne, berechnet mit dem Bonn A NN-Potential; analog Tabelle 5.3.



**Abb. 5.5:** Effektive Dichteabhängigkeit der  $\sigma$  (oben) und  $\omega$  (unten) Meson-Nukleon-Vertizes für das Bonn A NN-Potential im Vergleich mit den DB-Ergebnissen aus [29]. Die durchgezogene Linie entspricht der Parametrisierung aus [36], die gestrichelte der Parametrisierung mit den Impulskorrekturfaktoren  $\zeta_\sigma = -0.003$  und  $\zeta_\omega = -0.0015$ .



**Abb. 5.6:** Zustandsgleichung symmetrischer unendlicher Kernmaterie, berechnet mit dem Bonn A NN-Potential. Gezeigt werden DB-Ergebnisse aus [29] sowie die DDRH-Zustandsgleichung berechnet mit der Parametrisierung aus [36] und den impuls-korrigierten Vertizes aus Abbildung 5.5.

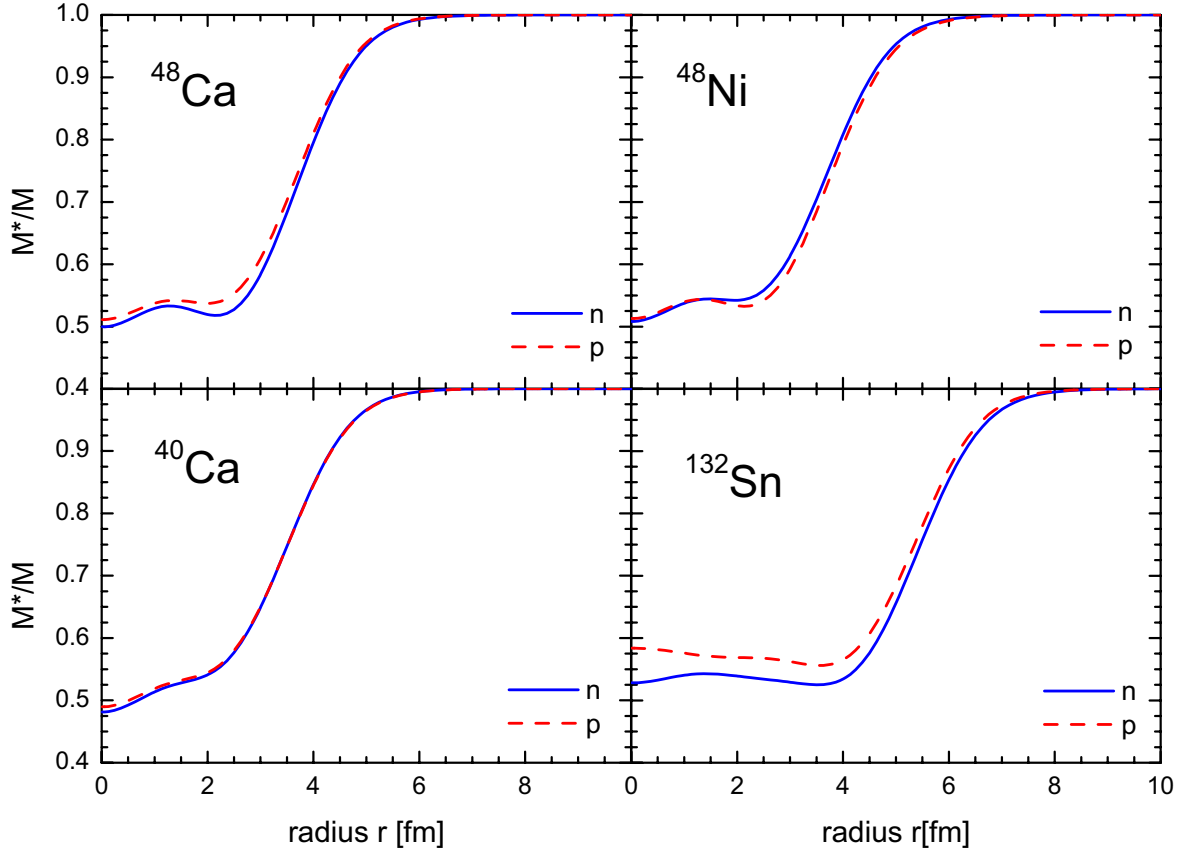
	Bonn A NM	Bonn A FN	Gron. NM	Gron. FN	FRDM
$\rho_{sat}$ [fm <sup>-3</sup> ]	0.162	0.157	0.180	0.188	0.153
$\epsilon/\rho$ [MeV]	-16.33	-15.81	-15.60	-16.58	-16.25
$K$ [MeV]	156	149	282	309	240
$m^*/M$	0.627	0.635	0.554	0.542	–
$a_4$ [MeV]	35.1	34.0	26.1	26.8	32.7

**Tab. 5.5:** Vergleich der Eigenschaften von unendlicher Kernmaterie, berechnet mit den Groningen und Bonn A Parametrisierungen. Ergebnisse werden gezeigt für Rechnungen im DDRH-Modell mit (FN) und ohne (NM) Impulskorrekturanpassung an endliche Kerne sowie zum Vergleich Parameter des Finite-Range-Droplet Modells [25].

Die Modifikation der dichteabhängigen Kopplungen der Bonn A Parametrisierung ist sehr gering. Verglichen mit dem ursprünglichen Fit [36], beschreiben die impuls-korrigierten Vertizes die DB-Selbstenergien in dem für endliche Kerne wichtigen Dichtebereich mit vergleichbarer Genauigkeit. Dies ist in Abbildung 5.5 dargestellt und zeigt, dass die Impulskorrektur eindeutig die Ergebnisse für endliche Kerne verbessern kann. Die impuls-korrigierten Vertizes erlauben eine verbesserte Extraktion der Selbstenergien aus Brückner-Rechnungen, ohne die mikroskopische Struktur der Wechselwirkung zu verändern. Es bestätigt sich auch die Aussage aus Kapitel 3, dass die makroskopischen Eigenschaften sehr empfindlich gegenüber kleinen Änderungen in den Kopplungen sind.

Die in den Rechnungen benutzte ursprüngliche Bonn A Parametrisierung aus [36] ist nicht in der Lage, die DB-Zustandsgleichung perfekt zu beschreiben [41, 63]. Da diese keine Impulskorrektur verwendet, haben wir die Zustandsgleichungen mit den impuls-korrigierten Vertizes aus endlichen Kernen neu berechnet. Wie man aus Abbildung 5.6 erkennen kann, verbessern diese die Übereinstimmung mit der DB-Zustandsgleichung vor allem am Sättigungspunkt ein wenig. Verglichen mit der sehr guten Übereinstimmung, die in Kapitel 3 für das Groningen Potential erreicht wurde, sind aber weitere Verbesserungen wünschenswert. Die DB-Ergebnisse sagen eine Bindungsenergie von  $-15.8$  MeV bei einer Sättigungsdichte von  $\rho_0 = 0.185$  fm<sup>-3</sup> sowie eine Kompressibilität  $K = 240$  MeV voraus [29]. Insbesondere an  $K$  erkennt man durch Vergleich mit Tabelle 5.5, dass erhebliche Abweichungen im DDRH-Modell auftauchen. Wir haben deshalb versucht, durch einen Fit an die DB-Bindungsenergien neue Impulskorrekturfaktoren  $\zeta_\alpha$  zu bestimmen. Es war jedoch nicht möglich, eine bessere Beschreibung als mit den in endlichen Kernen bestimmten Werten  $\zeta_\sigma = -0.0030$  fm<sup>-2</sup> und  $\zeta_\omega = -0.0015$  fm<sup>-2</sup> zu erreichen.

Der Grund für dieses auf den ersten Blick überraschende Verhalten liegt in den Brückner-Rechnungen aus [29], in denen *a priori* impulsunabhängige Selbstenergien angenommen wurden, die durch einen Fit an die positiven Energiezustände der  $G$ -Matrix bestimmt wurden. Dieses Verfahren scheint zu Inkonsistenzen zwischen den Selbstenergien und der Bindungsenergie zu führen. Dies zeigt sich in Abbildung 5.6 insbesondere bei geringeren Dichten, wo beide Parametrisierungen die DB-Bindungsenergien nicht korrekt beschreiben können, obwohl die Übereinstimmung mit

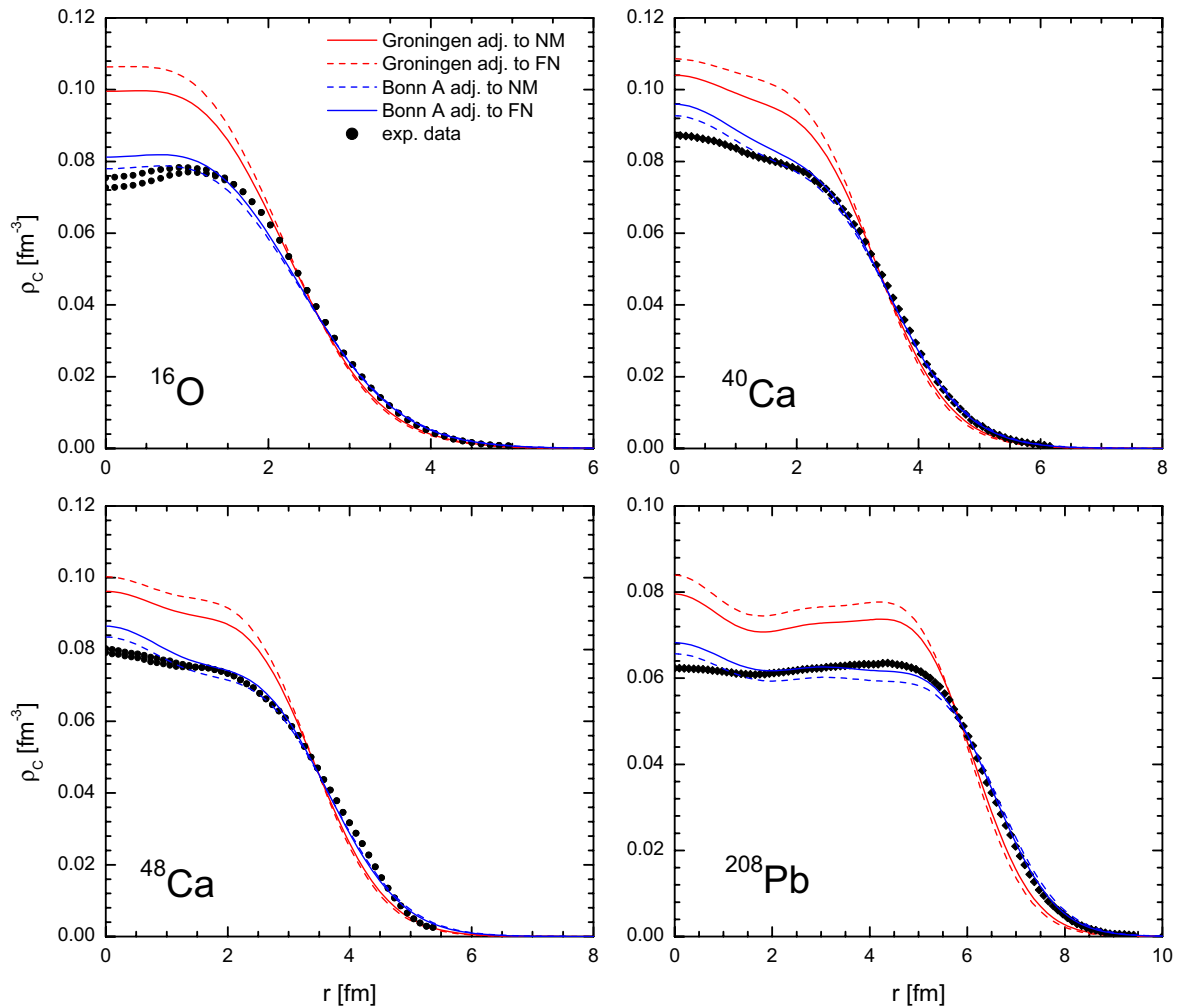


**Abb. 5.7:** Isospinabhängigkeit der effektiven Masse der doppelt magischen Kerne  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ni}$  und  $^{132}\text{Sn}$ , verursacht durch das  $\delta$  Mesons in der Parametrisierung des Groningen NN-Potential.

den Selbstenergien sehr gut ist. Das Versagen der Impulskorrektur liegt hier also an den ursprünglichen Brückner-Rechnungen, die überhaupt keine Impulsabhängigkeit berücksichtigten. Dies ist nicht überraschend, da die  $\zeta_\alpha$  die grundlegende Dichtabhängigkeit der Vertizes nicht verändern können. Trotz dieser kleinen theoretischen Unzulänglichkeiten liefert die Bonn A Parametrisierung sehr gute Ergebnisse für endliche Kerne.

### 5.3 Ladungsverteilungen und effektive Massen

Eine größere Bindungsenergie führt, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, zu einem tieferem Potential und damit zu einer Anhebung der Nukleonendichten im Kerninnern. Dies wird exemplarisch anhand der Ladungsdichten der magischen Kerne  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{208}\text{Pb}$  gezeigt, die in Abbildung 5.8 mit experimentellen Ladungsverteilungen verglichen werden. Das Bonn A Potential beschreibt, wie aus den Ergebnissen für die Ladungsradien in Tabelle 5.4 erwartet, die gemessenen Daten insbesondere an der Kernoberfläche sehr gut. Das Groningen Potential überschätzt dagegen die Ladungsdichte im Kerninnern um bis zu 20%. Der Einfluß der Impulskorrektur bewirkt eine



**Abb. 5.8:** Ladungsverteilungen der doppelt magischen Kerne  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{208}\text{Pb}$  im Vergleich mit dem Experiment. Dargestellt sind Ergebnisse für das Bonn A und das Groningen NN-Potential, jeweils für die Parametrisierungen aus unendlicher Kernmaterie und die Anpassung an endliche Kerne. Die Groningen Parametrisierung überschätzt die Ladungsdichte im Kerninnern.

Anhebung (Groningen) bzw. Absenkung (Bonn A) der Ladungsdichte. Der Effekt ist jedoch nicht sehr stark verglichen mit den Unterschieden zwischen den beiden NN-Potentialen. Dies liegt daran, dass die Eigenschaften der Wechselwirkung durch die Dichteabhängigkeit der Vertizes bestimmt sind und deshalb die Impulskorrektur nur geringe Veränderungen bewirken kann.

In Kapitel 2 wurde bereits gezeigt, dass das isovektorielle skalare  $\delta$ -Meson die Isospinunabhängigkeit der effektiven Masse  $m_b^* = M - \Sigma_0^s + \tau_b \Sigma_3^s$  aufhebt. Dieser Effekt ist auch in endlichen Kernen beobachtbar. In Abbildung 5.7 wird die Isektorabhängigkeit der effektiven Masse für einige repräsentative Kerne untersucht. In dem isospinsymmetrischen  $N = Z$  Kern  $^{40}\text{Ca}$  wird der Unterschied zwischen den effektiven Massen

der Neutronen und Protonen nur durch Coulombeffekte hervorgerufen und ist vernachlässigbar. Dagegen beträgt die Differenz beider Massen im Zentrum des neutronreichen Kerns  $^{132}\text{Sn}$  ungefähr 10%, hervorgerufen durch den Isovektorbeitrag zur skalaren Selbstenergie. Dieser Effekt wird anschaulich durch die Spiegelkerne  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ni}$  demonstriert, in denen die effektiven Massen der Neutronen und Protonen ein genau entgegengesetztes Verhalten zeigen. In den Rechnungen zeigt sich, dass der Einfluss der Impulskorrektur gering ist und nur zu einer geringen Abnahme (Zunahme) aufgrund des tieferen (flacheren) Zentralpotentials führt.

Die Bonn A Parametrisierung besitzt nur das isoskalare Vektormeson  $\rho$  und deshalb identische effektive Massen für Protonen und Neutronen. Die effektiven Massen sind allgemein etwa 10-15% höher als die des Groningen Potentials, wie auch aus Tabelle 5.5 ersichtlich ist, und weniger stark im Kerninnern reduziert.

## 5.4 Spin-Bahn-Aufspaltung

Die mit dem Groningen NN-Potential berechneten effektiven Massen sind relativ klein. Dies führt zusammen mit den relativ großen Selbstenergien auch zu einem starken isoskalaren Spin-Bahn-Potential  $U_0^{SO}$  (Gl. (4.9)), wie aus Abbildung 5.9 ersichtlich ist. In Analogie zu den Ergebnissen für die effektiven Massen wurde keine starke Abhängigkeit von der Impulskorrektur beobachtet. Zum Vergleich zeigen wir auch die Spin-Bahn-Potentiale der Bonn A Parametrisierung sowie der phänomenologischen NL3 Wechselwirkung [83]. Alle Wechselwirkungen zeigen ein ähnliches Verhalten. Die Maxima des Potentials treten an der Oberfläche auf, wo die Änderung der Selbstenergien bzw. Potentiale am stärksten ist. Hervorgerufen durch die starke Schalenstruktur der Ca und Ni Isotope findet man dort ein zweites, kleineres Maximum im Kerninnern. Die Groningen Wechselwirkung besitzt das stärkste Spin-Bahn-Potential, aber seine Stärke ist in etwa vergleichbar mit derjenigen der NL3 Wechselwirkung. Die Bonn A Wechselwirkung besitzt ein zu kleines Spin-Bahn-Potential mit einem zu größeren Radien hin verschobenen Maximum an der Oberfläche. Dieses Verhalten ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen für die effektiven Massen und das Zentralpotential. Ein Vergleich der Ergebnisse für die Spin-Bahn-Aufspaltung

$$\Delta_{LS}(n, l) = \epsilon_{n,l,j=l-1/2} - \epsilon_{n,l,j=l+1/2} \quad (5.5)$$

zeigt, dass die Aufspaltung des Groningen Potentials ungefähr doppelt so groß ist wie diejenige des Bonn A Potentials.

Dies illustriert Tabelle 5.6, in der zum Vergleich auch experimentelle Daten und Ergebnisse für die NL3 Wechselwirkung gezeigt werden. Diese zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment und können deshalb als Referenz zum Vergleich mit den Ergebnissen der mikroskopischen Wechselwirkungen herangezogen werden. Man erkennt, dass die Spin-Bahn-Aufspaltung  $\Delta_{LS}$  des Groningen Potentials um etwa 25% zu stark und  $\Delta_{LS}$  des Bonn A Potentials um ungefähr 30% zu schwach ist. Die in Tabelle 5.6 angegebenen experimentellen Werte sind mit relativ großen Unsicherheiten belastet, da sich aufgrund der starken Fragmentierung der Einteilchenzustände die Einteilchenenergien nicht zuverlässig bestimmen lassen [84]. Neuere Messungen ergeben für  $^{48}\text{Ca}$  eine Spin-Bahn-Aufspaltung des  $1d$ -Zustandes der Protonen  $> 5$  MeV,



$\Delta_{LS}(n, p)$	$^{16}\text{O}$	$^{40}\text{Ca}$	$^{48}\text{Ca}$	$^{48}\text{Ni}$
Gron.	8.0/7.8	8.3/8.0	8.0/7.7	7.5/7.4
Gron. adj.	9.0/8.7	9.6/8.8	8.8/8.5	8.3/8.2
Bonn A	4.2/4.2	4.6/4.6	4.0/4.1	3.9/3.8
Bonn A adj.	4.0/4.0	4.4/4.3	3.7/3.8	3.6/3.6
NL3	6.5/6.4	6.7/6.6	6.2/6.4	6.1/5.9
exp.	6.1/6.3	6.3/7.2	3.6/4.3	–

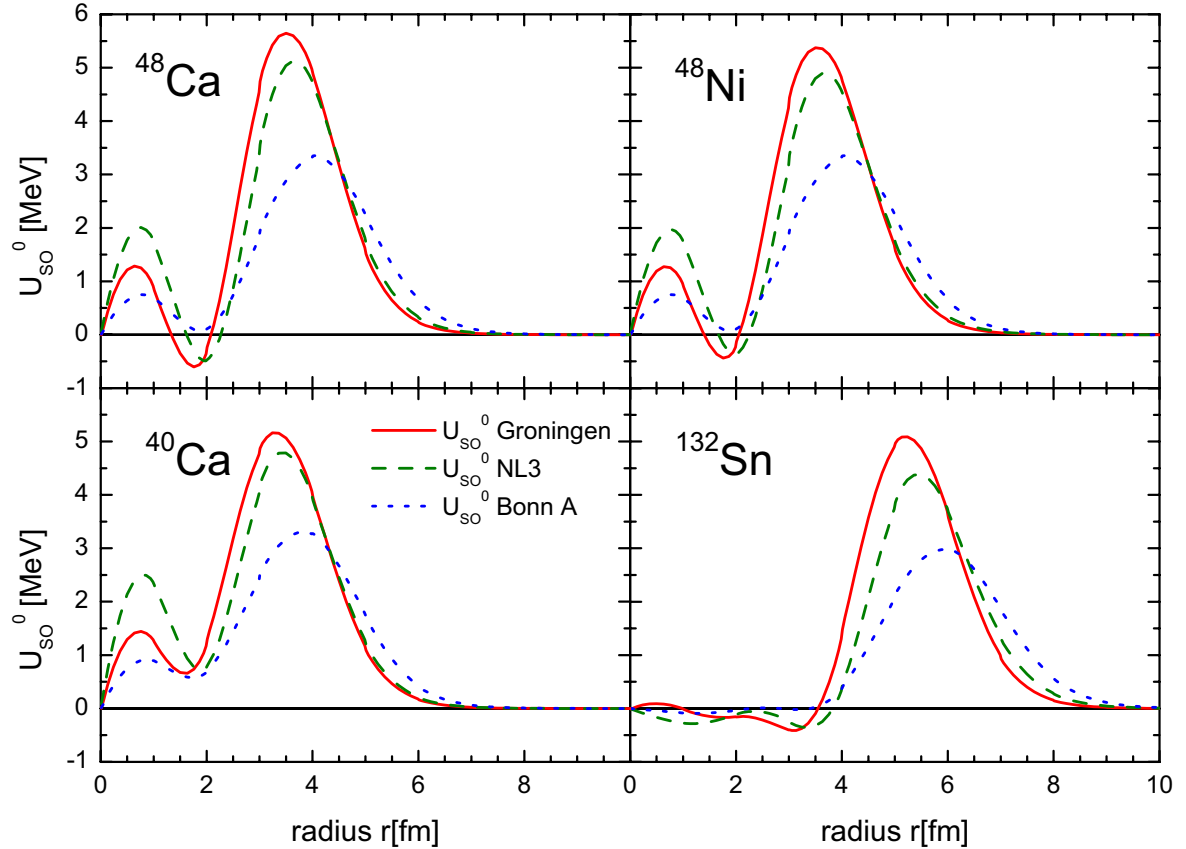
**Tab. 5.6:** Spin-Bahn-Aufspaltung  $\Delta_{LS}(n, p)$  in MeV der  $1p$ -Schale ( $^{16}\text{O}$ ) und der  $1d$ -Schale ( $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ni}$ ) für Neutronen und Protonen. Gezeigt werden Ergebnisse für das Groningen und das Bonn A NN-Potential, jeweils für die Wechselwirkungen, die in unendlicher Kernmaterie bzw. durch Anpassung an endliche Kerne bestimmt wurden. Zum Vergleich werden experimentellen Werte (genommen aus [38]) und Ergebnisse für die phänomenologische NL3 Wechselwirkung gezeigt [83].

was auch in besserer Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen ist. Dies wird detailliert in Referenz [84] diskutiert, wo die Spin-Bahn-Aufspaltung verschiedener Isotope mit relativistischen und nicht-relativistischen Wechselwirkungen untersucht wurde.

In Abbildung 5.10 wird die Isektorabhängigkeit des Spin-Bahn-Potentials  $U_{\tau}^{SO}$  gezeigt (Gl. (4.9)), die bereits in Kapitel II diskutiert wurde. Im Vergleich zu Wechselwirkungen, die nur das  $\rho$ -Meson enthalten, zeigt das Groningen Potential aufgrund des zusätzlichen  $\delta$ -Mesons und der daraus resultierenden wesentlich größeren Summe der isovektoriellen Selbstenergien eine beträchtliche Verstärkung. Die Bonn A und die NL3 Wechselwirkung zeigen für alle betrachteten Kerne ein extrem kleines Isektorpotential. Während auch das Groningen Potential in dem isospinsymmetrischen  $N = Z$  Kern  $^{40}\text{Ca}$  nur ein sehr schwaches  $U_{\tau}^{SO}$  besitzt, darf dieses in dem neutronenreichen Kern  $^{132}\text{Sn}$  nicht vernachlässigt werden. Interessant ist, dass der Hauptbeitrag nicht an der Kernoberfläche lokalisiert ist, sondern sich im Kerninnern befindet. Die Spiegelkerne  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ni}$  zeigen wieder ein entgegengesetztes Potential. Man könnte nun erwarten, dass sich dieses auch in einer unterschiedlichen Spin-Bahn-Aufspaltung von Protonen und Neutronen niederschlägt. Dies sollte eigentlich besonders gut durch eine entgegengesetzte Aufspaltung der Protonen- und Neutronenzustände in Spiegelkernen beobachtbar sein. Allerdings lässt sich aus Tabelle 5.6 kein systematisches Verhalten erkennen. Die Ursache dafür scheint zu sein, dass das isovektorielle Spin-Bahn-Potential die Einzelchenenergien nicht sehr stark beeinflusst. Dies ist verständlich, da seine Stärke an der Kernoberfläche weniger als 5% des isoskalaren Spin-Bahn-Potentials beträgt.

## 5.5 Zusammenfassung

Sowohl die Groningen als auch die Bonn A Parametrisierung erlauben eine gute Beschreibung endlicher Kerne. Dies ist bemerkenswert, da die Parametrisierungen direkt aus den mikroskopischen Wechselwirkungen abgeleitet wurden und für endliche Ker-



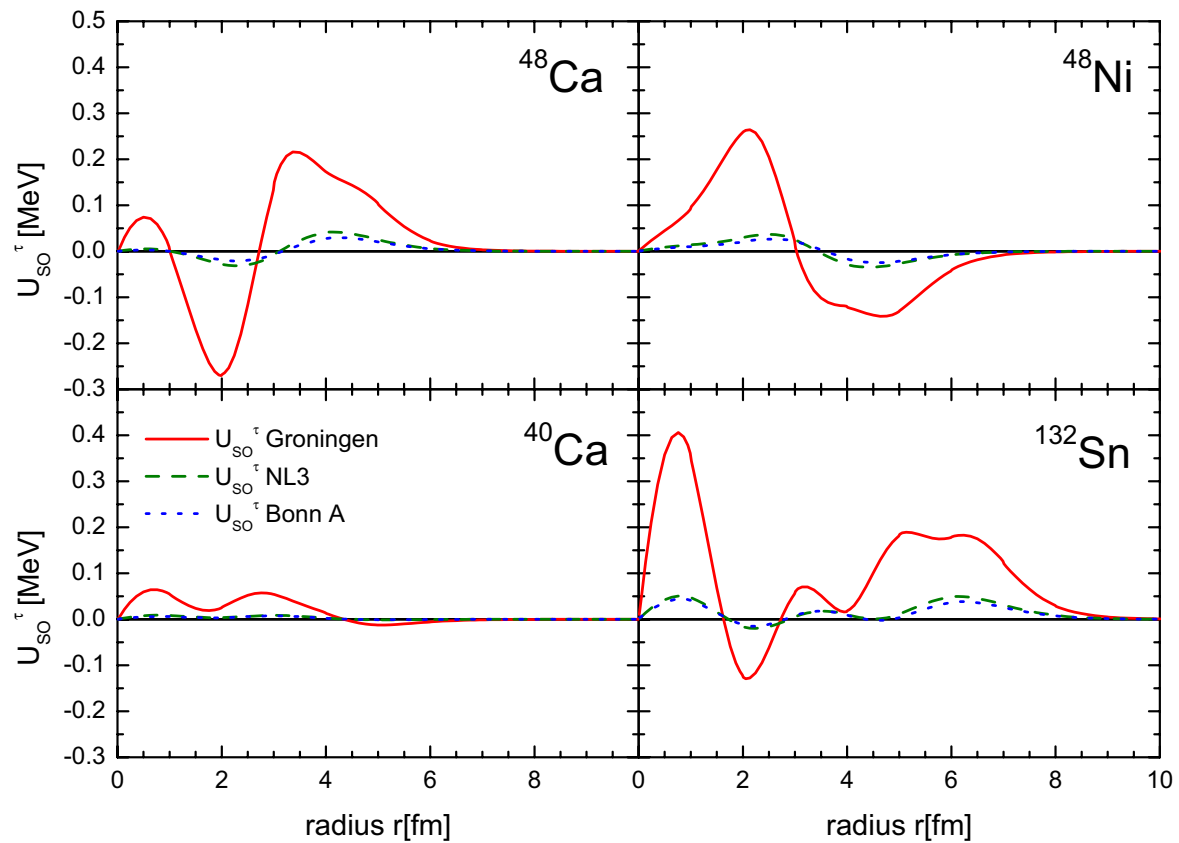
**Abb. 5.9:** Spin–Bahn–Potentiale der doppelt magischen Kerne  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  und  $^{132}\text{Sn}$  aus DDRH–Rechnungen. Dargestellt sind Ergebnisse mit der Bonn A und Groningen Parametrisierung für das isoskalare Potential  $U_0^{SO}$ . Zum Vergleich werden Rechnungen mit der phänomenologischen NL3 Parametrisierung gezeigt [83].

ne keine freien Parameter besitzen. Die Groningen Parametrisierung unterschätzt die Bindungsenergie pro Nukleon um 0.5 bis 1 MeV und liefert um 0.1 bis 0.15 fm zu kleine Radien. Diese Ergebnisse sind vergleichbar mit anderen relativistischen Hartree–Rechnungen [39, 40, 41].

Die Ergebnisse der Bonn A Wechselwirkung liegen näher an den experimentellen Ergebnissen, was sich direkt auf das verwendete NN–Potential und seine Eigenschaften in Kernmaterie zurückführen lässt. Diese lassen auch erkennen, dass das Groningen NN–Potential insbesondere im Niederdichtebereich nicht attraktiv genug ist.

Die Verwendung impulskorrigierter dichteabhängiger Vertizes führt zu einer verbesserten Beschreibung endlicher Kerne, ohne die hervorragende Übereinstimmung mit den Dirac–Brückner–Selbstenergien zu beeinträchtigen.

Das isovektorielle skalare  $\delta$ -Meson erzeugt unterschiedliche effektive Massen für Protonen und Neutronen und führt zu einer beträchtlichen Verstärkung des isovektoriellen Spin–Bahn–Potentials. Dies führt jedoch zu keinem erkennbaren systematischen Verhalten der isovektoriellen Spin–Bahn–Aufspaltung. Um diesen Effekt genauer untersu-



**Abb. 5.10:** Analog Abbildung 5.9, jedoch werden Ergebnisse für das isovektorielle Spin–Bahn–Potential  $U_{\tau}^{SO}$  gezeigt.

chen zu können, werden detailliertere experimentelle Daten für die Einteilchenenergien insbesondere von stark asymmetrischen Isotopen benötigt. Verglichen mit phänomenologischen Wechselwirkung besitzt das Groningen Potential eine etwas zu starke, das Bonn A Potential eine zu schwache Spin–Bahn–Aufspaltung.

Im nächsten Kapitel werden exotische Kerne mit den betrachteten mikroskopischen Wechselwirkungen untersucht.



# Kapitel 6

## Ergebnisse für exotische Kerne

Exotische Kerne sind von besonderem Interesse für Kernstrukturrechnungen, da sie es erlauben, die NN-Wechselwirkung in den Regionen jenseits der Stabilität zu untersuchen, wo die Isektorwechselwirkung zunehmend an Bedeutung gewinnt. Es zeigt sich, dass an stabile Kerne angepasste phänomenologische Wechselwirkungen<sup>1</sup> für exotische Kerne teilweise überraschend große Abweichungen zeigen. Obwohl die Übereinstimmung mit den wenigen experimentellen Werten immer noch gut ist, ist die Qualität der Ergebnisse nicht mit der der Ergebnisse stabiler Kerne vergleichbar. Da es sich bei diesen Rechnungen um eine Extrapolation einer an bekannte Daten angepassten Parametrisierung in einen Bereich mit neuer Physik handelt, lassen sich wegen des phänomenologischen Charakters der Wechselwirkung nur schwierig Rückschlüsse auf die erforderlichen Eigenschaften einer mikroskopischen NN-Wechselwirkung ziehen. Die dichteabhängige Parametrisierung einer mikroskopischen Wechselwirkung hingegen stellt eine stärkere Verbindung zwischen dem realistischen NN-Potential und den Ergebnissen für exotische Kerne her. Man muss sich jedoch vor Augen halten, dass die Qualität der Ergebnisse einer solchen Wechselwirkung immer noch nicht mit der Qualität derer aus phänomenologischen Parametrisierungen verglichen werden kann. Diese beschreiben die Eigenschaften von (stabilen) Kernen mit einem Fehler  $< 1\%$ , während mikroskopische Rechnungen, wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, Fehler von  $1 - 5\%$  aufweisen. Eine Vorhersage der Eigenschaften exotischer Kerne ist deshalb nur bedingt möglich. Exotische Kerne als Testobjekte der in Kapitel 3 bestimmten dichteabhängigen Wechselwirkung liefern jedoch sehr aufschlussreiche Ergebnisse.

Die Isotopenketten von Sn und Ni bestehen wegen ihres magischen Schalenabschlusses für  $Z = 28$  bzw.  $Z = 50$  Protonen aus sphärisch symmetrischen Kernen und erlauben eine systematische Untersuchung des Isektorkanals der NN-Wechselwirkung, da sie sich von der Protonenabbruchkante bis zu den durch  $\beta$ -Zerfall instabilen neutronenreichen Isotopen erstrecken. Interessant ist auch die große Anzahl der enthaltenen doppelt magischen Isotope (insbesondere die extrem protonenreichen Kerne  $^{48}\text{Ni}$  und  $^{100}\text{Sn}$  und die neutronenreichen Kerne  $^{78}\text{Ni}$  und  $^{132}\text{Sn}$ ). Eine systematische Untersuchung dieser Kerne mit relativistischen und nicht-relativistischen phänomenologischen

---

<sup>1</sup>Unter den RMF Wechselwirkungen sind hier insbesondere folgende Parametrisierungen zu erwähnen: NL1 [13], NL-SH [85], NL3 [83], TM1 [86], NL-SV1 und NL-SV2 [87], PL-Z und PL-40 [19]

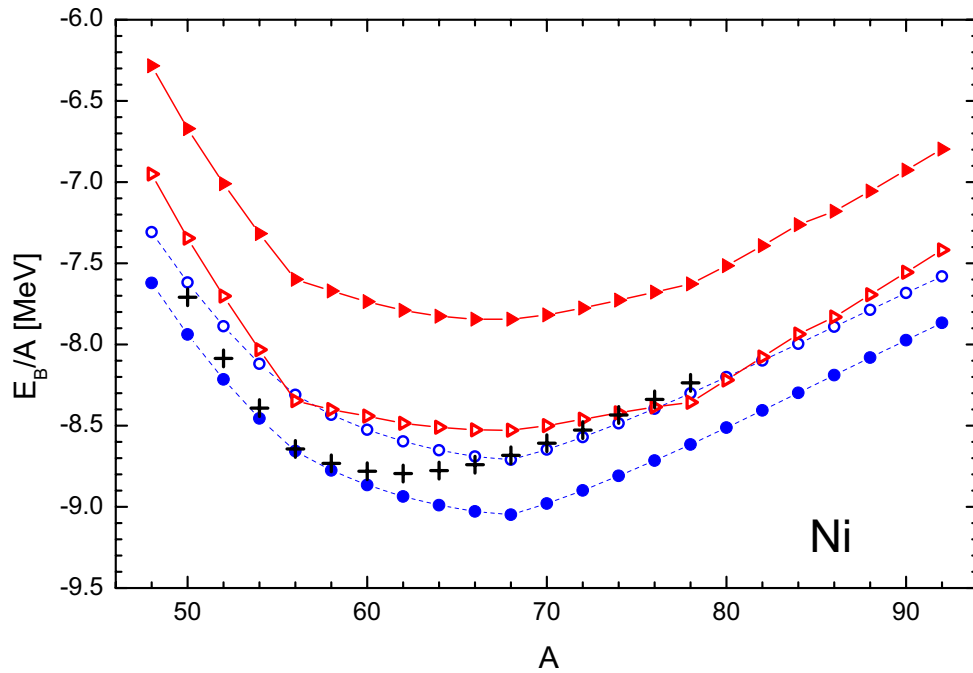
Wechselwirkungen findet man in [16, 17, 18, 71, 88] und den dort enthaltenen Referenzen.

Wie schon erwähnt wurde, sollte für eine korrekte Beschreibung von Kernen an den Abbruchkanten die Ankopplung an das Kontinuum durch Hartree–Bogoliubov–Rechnungen berücksichtigt werden. Da der Einfluss der Paarkorrelation ( $< 2\%$  auf die Bindungsenergie) jedoch kleiner ist als die durch Verwendung der mikroskopischen Wechselwirkung bestehende Differenz zu den experimentellen Ergebnissen ( $1 - 5\%$ ), ist es ausreichend, die Paarkraft in BCS–Näherung (Kapitel 4) zu behandeln. Wir folgen hier dem Ansatz aus [81] und verwenden den Wert  $G = 2.15 \text{ MeV}/\sqrt{A}$ .

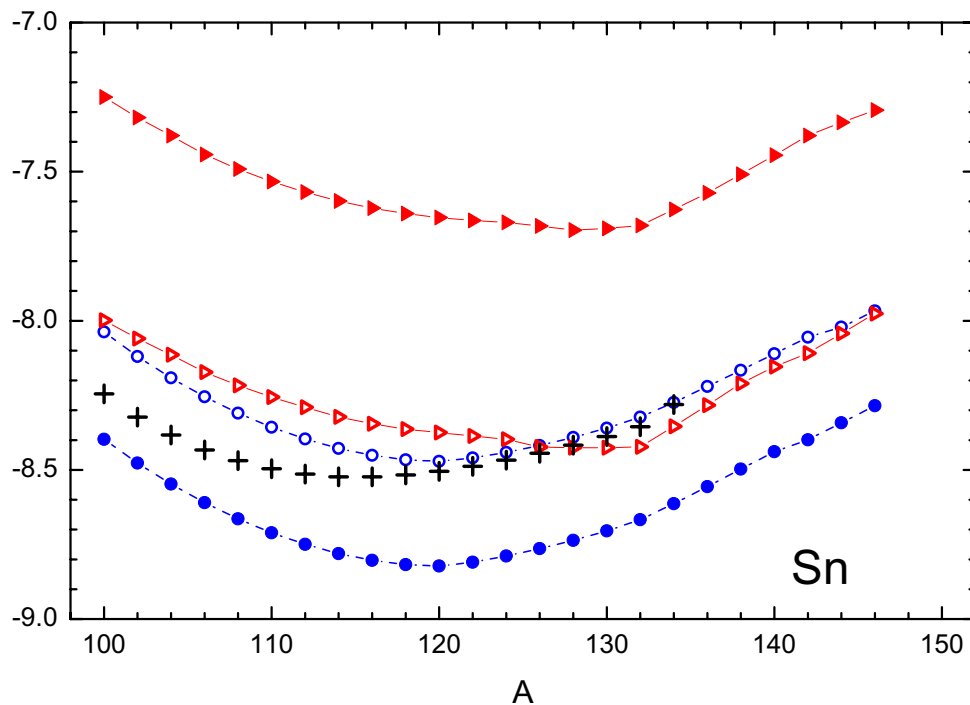
## 6.1 Bindungsenergien

Die theoretischen und die experimentellen Bindungsenergien pro Nukleon der Nickel–Isotope werden in Abbildung 6.1 verglichen, diejenigen der Zinn–Isotope in Abbildung 6.2. Ergebnisse von den Protonenabbruchkanten ( $^{48}\text{Ni}$  und  $^{100}\text{Sn}$ ) bis zu extrem neutronreichen Isotopen ( $^{92}\text{Ni}$  und  $^{150}\text{Sn}$ ) werden gezeigt. Im Gegensatz zu den Protonen wird die Neutronenabbruchkante bei diesen Rechnungen nicht erreicht. Sie befindet sich jenseits der bisher experimentell beobachteten Isotope. Die Ursache der Protonenabbruchkante ist hauptsächlich die Coulombrepulsion der Protonen. Neutronenabbruchkanten hingegen werden nur durch die Isektorrepulsion der Neutronen hervorgerufen, so dass die schwereren Kerne wesentlich mehr Neutronen als Protonen aufnehmen können. Deshalb war es bis jetzt nur für sehr leichte Kerne (z.B. Li) möglich, experimentell an die Neutronenabbruchkante zu gelangen. Da der Wirkungsquerschnitt für die Produktion dieser instabilen Isotope mit der Hinzunahme jedes weiteren Neutrons stark abnimmt, wird es ohne neue experimentelle Techniken auf absehbare Zeit nicht möglich sein, an die Ni- und Sn–Neutronenabbruchkante zu gelangen.

Man erkennt, dass die in Kernmaterie bestimmte Parametrisierung des Groningen Potentials sowohl die Ni- als auch die Sn–Isotope stark unterbindet. Dieses Verhalten entspricht den Ergebnissen für magische Kerne und wurde schon in Kapitel 5 ausführlich diskutiert. Die Parametrisierung mit der an endliche Kerne angepassten Impulskorrektur liefert dagegen für die Ni–Isotope zufriedenstellende Ergebnisse. Während die neutronreichen Isotope gut beschrieben werden, sind die neutronenarmen Isotope um etwa  $0.4 \text{ MeV}$  pro Nukleon unterbunden. Für die Sn–Isotope beobachtet man ein ähnliches Verhalten. Jedoch stimmt der qualitative Verlauf der Bindungsenergiekurve mit den experimentellen Daten nicht sehr gut überein. Die Ursache liegt hauptsächlich in dem extrem starken Schalenabschluss für  $N=82$ , der das Minimum der Bindungsenergie vom experimentellen Wert bei ungefähr  $^{115}\text{Sn}$  zu dem doppelt magischen Isotop  $^{132}\text{Sn}$  verschiebt. Der Grund für diesen starken Schalenabschluss ist die zu große Spin–Bahn–Aufspaltung des Groningen Potentials. Dies beeinflusst die Struktur der Unterschalen der Sn–Isotope und verstärkt den Schalenabschluss. Aufgrund der dadurch abgeschwächten Paarkorrelationen ist die Ausschmierung der Schalenstruktur wesentlich geringer als bei den experimentellen Bindungsenergien. Dies macht sich durch einen „Knick“ in der Bindungsenergiekurve bemerkbar.



**Abb. 6.1:** Bindungsenergien pro Nukleon der Ni-Isotope aus DDRH-Rechnungen. Dargestellt sind Ergebnisse ohne (offene Kreise) und mit (gefüllte Kreise) Impulskorrektur für die Bonn A Parameterisierung. Ergebnisse für die Groningen Parameterisierung werden durch gefüllte Dreiecke (Impulskorrektur aus Anpassung an Kernmaterie) und offene Dreiecke (Anpassung an endliche Kerne) repräsentiert. Zum Vergleich werden experimentelle Bindungsenergien aus [78] gezeigt (Kreuze).



**Abb. 6.2:** Analog Abbildung 6.1, jedoch mit Ergebnissen für die Sn-Isotope.

Trotzdem beschreibt das Groningen Potential die korrekte Schalenstruktur der Ni- und Sn-Isotope. Dies wird aus Abbildung 6.3 ersichtlich, in der die Zwei-Neutronen-Separationsenergien

$$S_{2n}(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 2) \quad (6.1)$$

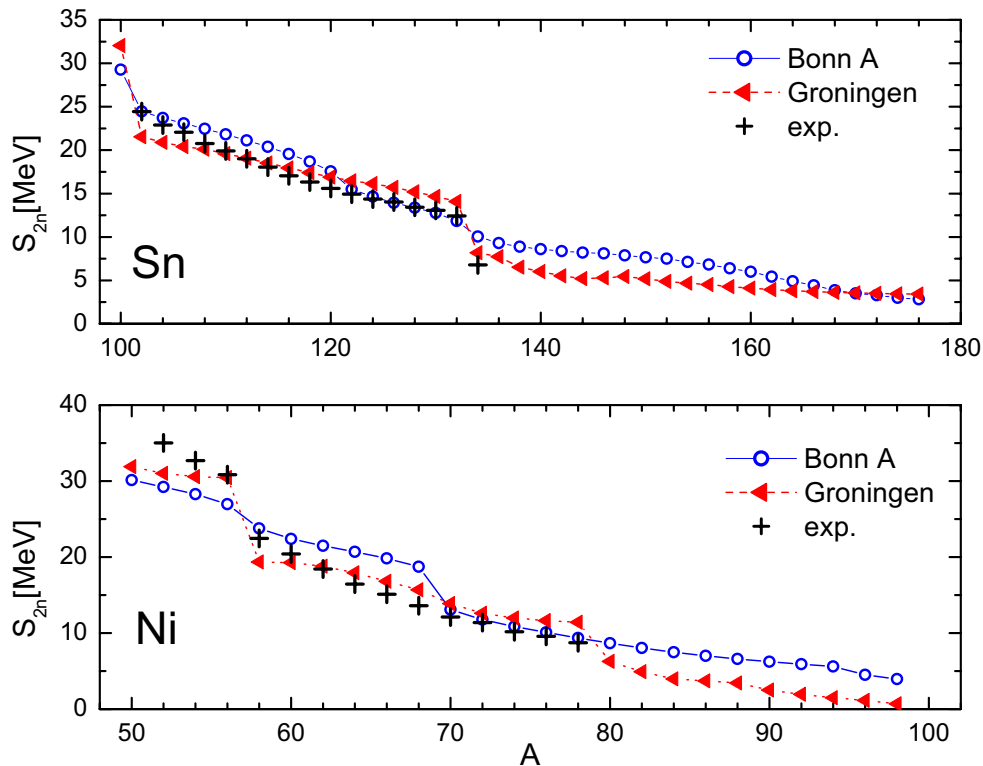
gezeigt werden. Abgeschlossene Schalen sind energetisch günstiger als nur teilweise besetzte Schalen (dies kann nur teilweise durch die Paarkraft kompensiert werden), deshalb verursacht ein Schalenabschluss einen Sprung in den Separationsenergien. Bei den Ni-Isotopen beobachtet man dies bei  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{68}\text{Ni}$  und  $^{78}\text{Ni}$ , bei den Sn-Isotope bei  $^{100}\text{Sn}$  und  $^{132}\text{Sn}$ . Die Übereinstimmung des Groningen Potentials mit den experimentellen Separationsenergien ist gut, wenn man von den etwas zu starken Schalenabschlüssen bei  $^{56}\text{Ni}$  und  $^{132}\text{Sn}$  absieht, und die experimentellen Abschlüsse werden korrekt beschrieben. Man erkennt an dem flachen Verlauf der Kurven für große A, dass die Neutronenabbruchkante für Sn erst jenseits von  $A=180$  und für Ni erst etwa bei  $A=100$  erreicht werden wird. Ein negatives  $S_{2n}$  bedeutet, dass es energetisch günstiger für den Kern ist, Neutronen abzugeben. Er wird damit instabil. Dies macht sich entsprechend auch durch ein positives chemisches Potential (oder Fermienergie) in der BCS-Rechnung bemerkbar.

Es wurde auch der Einfluss der unterschiedlichen Impulskorrekturfaktoren auf die Separationsenergien untersucht. Dieser ist jedoch sehr gering, da er nur zu einer Verschiebung der Bindungsenergiekurve führt (siehe Kapitel 5) und dementsprechend die Differenz  $S_{2n}$  nicht beeinflusst.

Das Bonn A Potential beschreibt die protonenreichen Ni-Isotope zufriedenstellend, überbindet aber die neutronenreiche Seite stark. Die impulskorrigierte Parametrisierung zeigt ein entgegengesetztes Verhalten mit einer guten Übereinstimmung für die neutronenreichen Isotope und einer leichten Unterbindung von ungefähr 0.2 MeV für die Kerne in der Region um  $N \sim Z$ . Für die Sn-Isotope beobachtet man das gleiche Verhalten, jedoch ist die Beschreibung der impulskorrigierten Parametrisierung hier insgesamt besser. Ein Vergleich der Zwei-Neutronen-Separationsenergien in Abbildung 6.3 zeigt, dass auch hier die experimentellen Werte gut beschrieben werden. Man erkennt allerdings einige kleine Abweichungen. So sind die Schalenabschlüsse für  $^{132}\text{Sn}$  und  $^{56}\text{Ni}$  relativ klein, während, verglichen mit dem Experiment, bei  $^{68}\text{Ni}$  ein zu starker Abschluss gefunden wird. Dies erklärt auch, warum das Minimum der Bindungsenergie bei  $^{68}\text{Ni}$  liegt und die Isotope der  $^{56}\text{Ni}$  bis  $^{68}\text{Ni}$  Unterschale zu schwach gebunden sind. Die Ursache dafür, dass die experimentellen Energiedifferenzen zwischen abgeschlossenen Schalen nur teilweise wiedergegeben werden, ist wahrscheinlich das zu schwache Spin-Bahn-Potential des Bonn A Potentials.

Eine detaillierte Untersuchung der Schalenstruktur der Ni und Sn-Isotope ermöglicht ein Blick auf die Paarkorrelationen. In Abbildung 6.4 werden für die Groningen und Bonn A Parametrisierungen die Pairing-Energien und -gaps der Ni-Isotopenkette dargestellt. Zum Vergleich werden auch Ergebnisse für die NL3-Wechselwirkung gezeigt. In [16] und [71] wurden Hartree-Bogoliubov-Rechnungen für die Sn- und Ni-Isotope mit dieser Wechselwirkung durchgeführt, in denen eine hervorragende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten (Separationsenergien, Bindungsenergien, Ladungsradien) gefunden wurde. Im Vergleich zu diesem verfeinerten Modell ergibt unsere Rechnung mit der NL3-Wechselwirkung in BCS-Näherung ver-

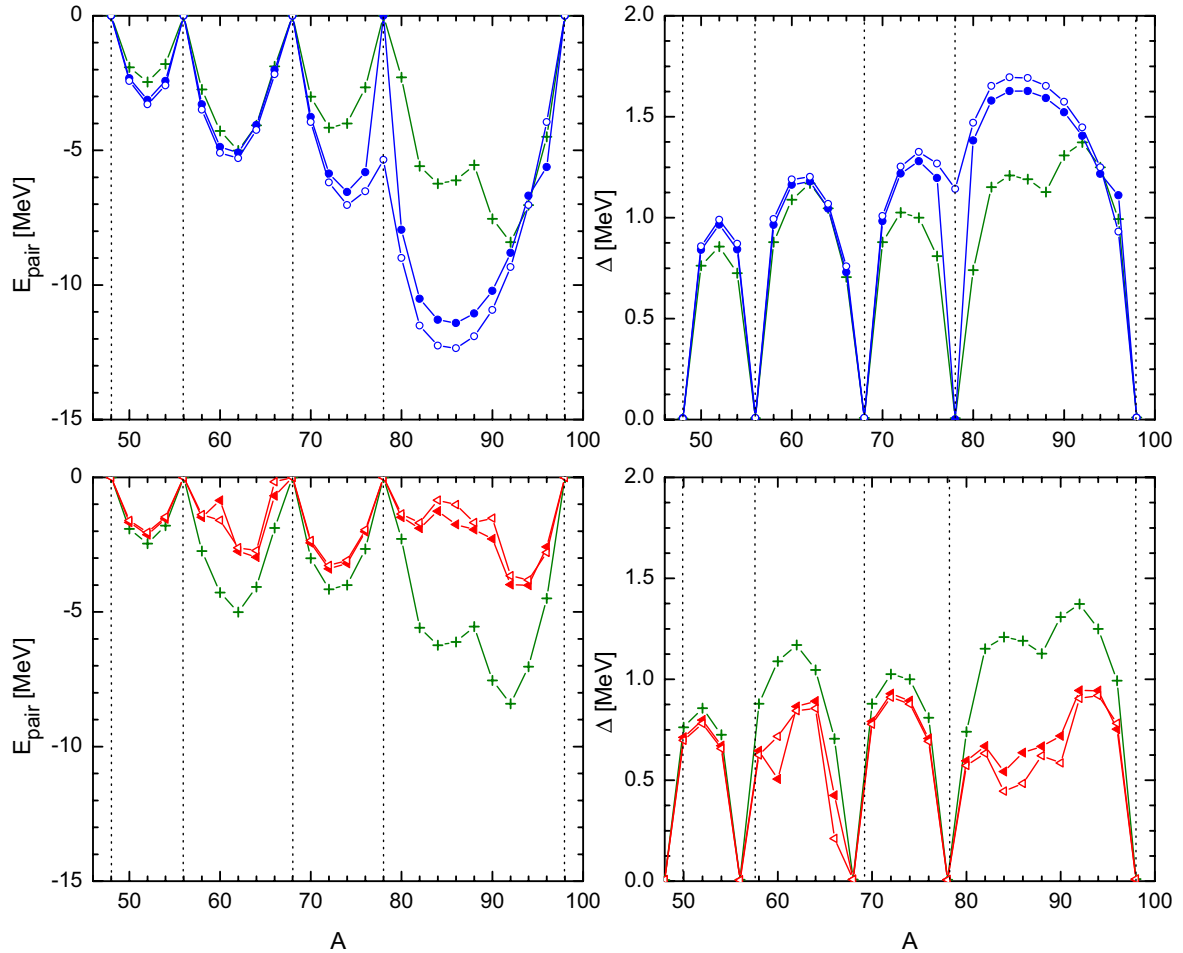




**Abb. 6.3:** Zwei-Neutronen-Separationsenergien der die Ni- (unten) und Sn-Isotope (oben). Gezeigt werden Ergebnisse für die Bonn A (Kreise) und Groningen Parametrisierung (Dreiecke) sowie experimentelle Separationsenergien (Kreuze) aus [78].

gleichbare Pairing-Gaps in der Größenordnung von 1 – 1.5 MeV und kann als sehr gute Näherung betrachtet werden. Man erkennt in Abbildung 6.4 die abgeschlossenen Neutronenschalen durch verschwindende Gaps (und Pairing-Energien  $\sim \Delta^2$ ). Diese werden von beiden mikroskopischen Wechselwirkungen korrekt beschrieben. Das Groningen Potential unterschätzt den Gap jedoch aufgrund der stärker ausgeprägten Schalenstruktur etwas, während das Bonn A Potential im Vergleich zur NL3 Wechselwirkung einen zu großen Gap liefert. Alle Wechselwirkungen sagen eine weitere magische Zahl für  $N=70$  voraus. Allerdings sollte man anmerken, dass es sich hierbei um eine Extrapolation zu extrem neutronenreichen Isotopen handelt.

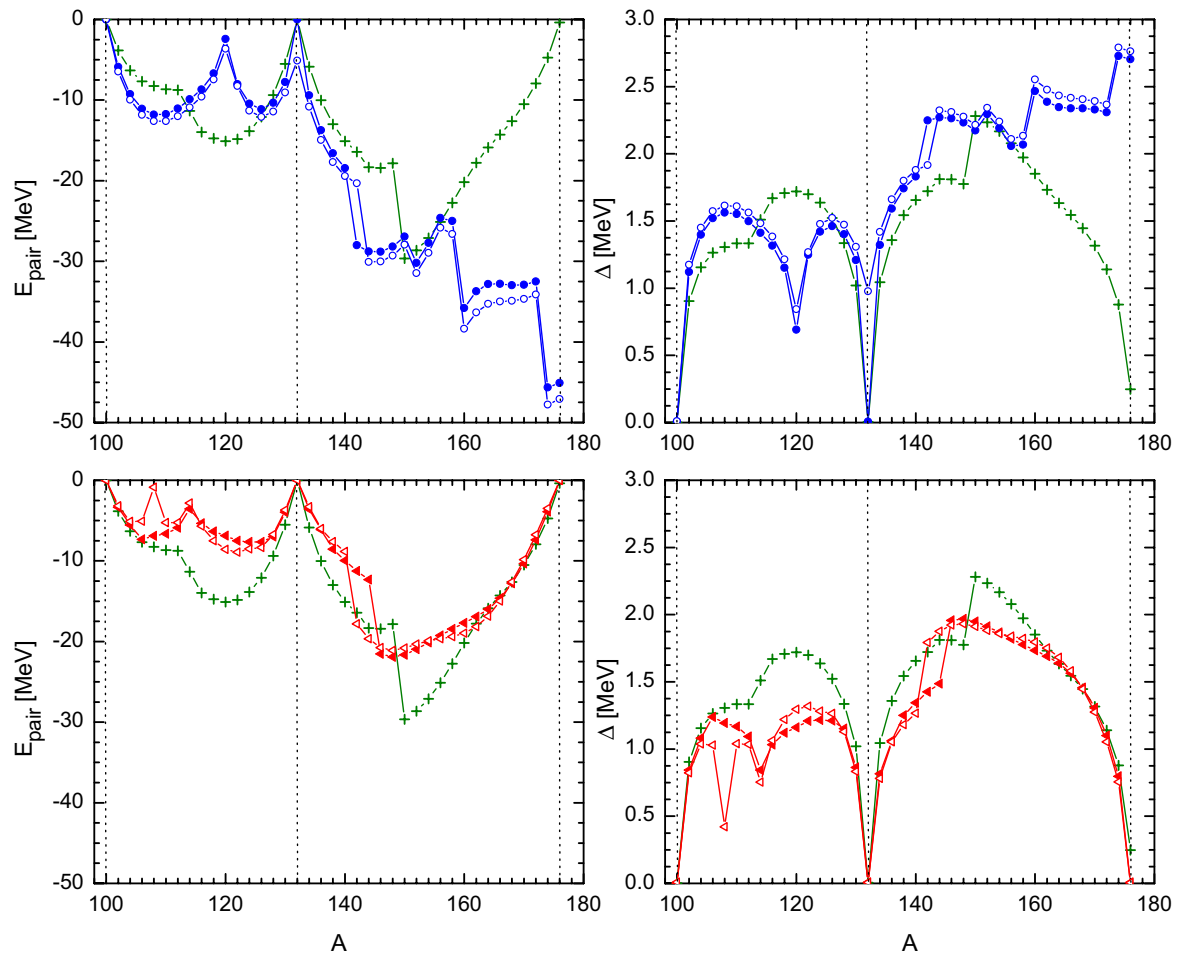
In Abbildung 6.5 werden die gleichen Rechnungen für die Sn-Isotopenkette gezeigt. Hier sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Wechselwirkungen geringer und alle Schalenabschlüsse werden korrekt beschrieben. Wiederum findet die Groningen Parametrisierung die kleinsten und die Bonn A Parametrisierung die größten Gaps. Interessant sind hier jedoch die Andeutungen eines Unterschalenabschlusses für  $N=70$  (Bonn A) bzw.  $N=64$  (Groningen), die man bei der NL3 Wechselwirkung nicht erkennt. Dies ist ein Hinweis auf die unterschiedliche Struktur der Einteilchenenergien, die von den unterschiedlichen Spin-Bahn-Potentialen erzeugt wird. So erkennt man deutlich den schwächeren Schalenabschluss des Bonn A Potentials für  $N=82$ , der sich auch in



**Abb. 6.4:** Pairing-Energien (links) und -Gaps (rechts) der Ni-Isotopenkette in BCS-Näherung aus DDRH-Rechnungen. Gezeigt werden Ergebnisse für die Bonn A (oben) und Groningen (unten) Parametrisierung für die entsprechenden Impulskorrekturen (siehe Abbildung 6.1). Zum Vergleich werden jeweils Rechnungen mit der phänomenologischen NL3 Wechselwirkung gezeigt (Kreuze). Die Linien dienen der besseren Übersicht. Erwartete Schalenabschlüsse sind durch horizontale Linien gekennzeichnet.

den Separationsenergien zeigt. Dies könnte auch die Ursache dafür sein, dass die von der Groningen und NL3 Wechselwirkung vorhergesagte abgeschlossene Schale bei  $N=126$  nicht gefunden wird. Auch hier gilt jedoch, dass eine Extrapolation der Wechselwirkung bis zu  $^{176}\text{Sn}$  mit Vorsicht betrachtet werden sollte.

Aus den Abbildungen 6.1 und 6.2 erkennt man, dass es mit keiner der Parametrisierungen möglich ist, neutronenarme und neutronenreiche Isotope mit der gleichen Qualität zu beschreiben, man findet auf einer Seite der Asymmetrie immer eine Differenz zum Experiment von bis zu 0.4 MeV pro Nukleon. Für  $N \rightarrow Z$  ist nur die Coulomb-Wechselwirkung für den Unterschied zwischen den Bindungsenergien der Protonen und Neutronen verantwortlich, da der Isovektorkanal der NN-Wechselwirkung stark unterdrückt ist. Daraus folgt, dass die Unterbindung auf der protonenreichen



**Abb. 6.5:** Analog Abbildung 6.4, jedoch mit Ergebnissen für die Sn–Isotopenkette.

Seite durch eine zu schwache isoskalare Wechselwirkung hervorgerufen wird. Andererseits wird die Bindungsenergie auf der neutronenreichen Seite hauptsächlich durch die Isektorwechselwirkung bestimmt. Diese ist attraktiv für Protonen, und kompensiert so deren Coulombabstoßung, und repulsiv für Neutronen. Deshalb ist die gute Beschreibung der neutronenreichen Isotope ein Anzeichen dafür, dass die Isektorwechselwirkungen des Bonn A und des Groningen Potentials zu schwach sein könnten. Man kann sich dies anschaulicher vorstellen, indem man die Bindungsenergiekurven aus Abbildung 6.1 oder 6.2 vertikal so verschiebt, dass für  $N=Z$  Kerne die experimentellen Bindungsenergien getroffen werden. Dies entspricht in erster Ordnung nur einer Änderung der isoskalaren Wechselwirkung und lässt die Isektorwechselwirkung unverändert. Man erkennt dann, dass die neutronenreichen Kerne zu schwach gebunden werden, was ein Hinweis auf die zu schwache Repulsion des Isektorpotentials ist. Ein zu schwaches Isektorpotential wurde auch in Rechnungen mit nicht-relativistischen mikroskopischen Wechselwirkungen beobachtet [34, 64].

Die mikroskopischen  $\delta$ - und  $\rho$ -Vertizes der Groningen Parametrisierung besitzen eine relativ starke Dichteabhängigkeit und ihre Stärke an  $\rho_0$  ist etwa doppelt so groß wie diejenige des konstanten  $\rho$ -Vertex der Bonn A Parametrisierung. Ein Vergleich der

Ergebnisse für beide Wechselwirkungen zeigt jedoch, dass der Einfluss des  $\delta$ -Mesons auf die effektive Stärke der Isovektorwechselwirkung gering ist: Beide Parametrisierungen liefern vergleichbare Ergebnisse, die Isovektorwechselwirkung ist zu schwach. Die Erklärung ist, dass sich die Potentiale der  $\delta$ - und  $\rho$ -Mesonen zu einem effektiven Isovektorpotential kompensieren (siehe Gl.(4.8) und Abbildung 5.2), dessen Stärke ungefähr dem des konstanten  $\rho$ -Mesons der Bonn A Parametrisierung entspricht.

## 6.2 Radien und Dichteverteilungen

Als nächstes untersuchen wir die Radien der Ni- und Sn-Isotope, die wie in Kapitel 5 definiert berechnet werden. In Abbildung 6.6 werden die mittleren Neutronen- und Ladungsradien der Ni-Isotope für die Groningen und Bonn A Parametrisierungen gezeigt. Mit zunehmender Neutronenzahl werden auch die Neutronenradien systematisch größer. Man beobachtet unterhalb  $A=58$  und  $A=78$  eine Sättigung des Anstieges bevor die Radien danach wieder stärker ansteigen. Dieses Verhalten ist beim Groningen Potential ausgeprägter und wird wieder durch den stärkeren Schalenabschluss verursacht. Bei fast abgeschlossenen Schalen bewirkt das Hinzufügen neuer Neutronen in einen Zustand mit dem gleichen Bahndrehimpuls nur eine geringe Änderung der Radien. Fügt man hingegen Neutronen zu einem magischen Kern hinzu, wird eine neue Unterschale mit anderem Drehimpuls besetzt, was den beobachteten starken Anstieg verursacht. Die Abhängigkeit der Neutronenradien von der Neutronenzahl ist bei der Bonn A Parametrisierung wesentlich stärker ausgeprägt. So wächst der Radius um 1.2 fm bzw. 35% von  $^{48}\text{Ni}$  bis  $^{82}\text{Ni}$  durch die zusätzlichen 34 Neutronen. Bei der Groningen Parametrisierung beobachtet man hingegen nur einen Anstieg von 0.9 fm bzw. 28%. Die Ladungsradien werden durch das Hinzufügen von Neutronen nur schwach beeinflusst. Unterhalb  $A=56$  bleiben sie konstant oder schrumpfen sogar etwas (Bonn A), danach beobachtet man nur einen leichten Anstieg von 5-7%. Ein Vergleich mit den verschiedenen experimentell bestimmten Ladungsradien zeigt eine hervorragende Übereinstimmung für beide Parametrisierungen des Bonn A Potentials, während das Groningen Potential in Analogie zu den Ergebnissen für magische Kerne die Radien systematisch unterschätzt. Die Impulskorrektur bewirkt, wie bei den Bindungsenergien, nur eine für alle Isotope identische vertikalen Verschiebung.

In Abbildung 6.8 wird zur besseren Verdeutlichung des unterschiedlichen Verhaltens der Neutronen und Protonen die Differenz der Neutronen- und Protonenradien gezeigt. Diese kann als Maß für die Neutronen- bzw. Protonen-Hautdicke in einem Kern interpretiert werden. Zum Vergleich wird aufgrund fehlender experimenteller Daten für die Neutronenradien wieder die NL3 Wechselwirkung herangezogen, die eine sehr gute Beschreibung experimenteller Ladungsradien liefert [17, 83]. Die Übereinstimmung mit dem Bonn A Potential ist hervorragend. Das Groningen Potential zeigt tendenziell das gleiche Ergebnis, unterschätzt jedoch die Differenz der Radien. Dies erklärt sich durch die systematische Unterschätzung der einzelnen Radien (Abbildung 6.6), die zu einer Reduzierung der Differenz zwischen Protonen- und Neutronenradien führt. Alle Wechselwirkungen sagen unterhalb  $N=28$  eine relativ dicke Protonenhaut in der Nähe der Protonenabbruchkante voraus. Oberhalb  $^{78}\text{Ni}$  ( $N=50$  Schalenabschluss) bildet sich eine sehr dicke Neutronenhaut, die durch das Besetzen der  $2d_{5/2}$  Unterschale entsteht.

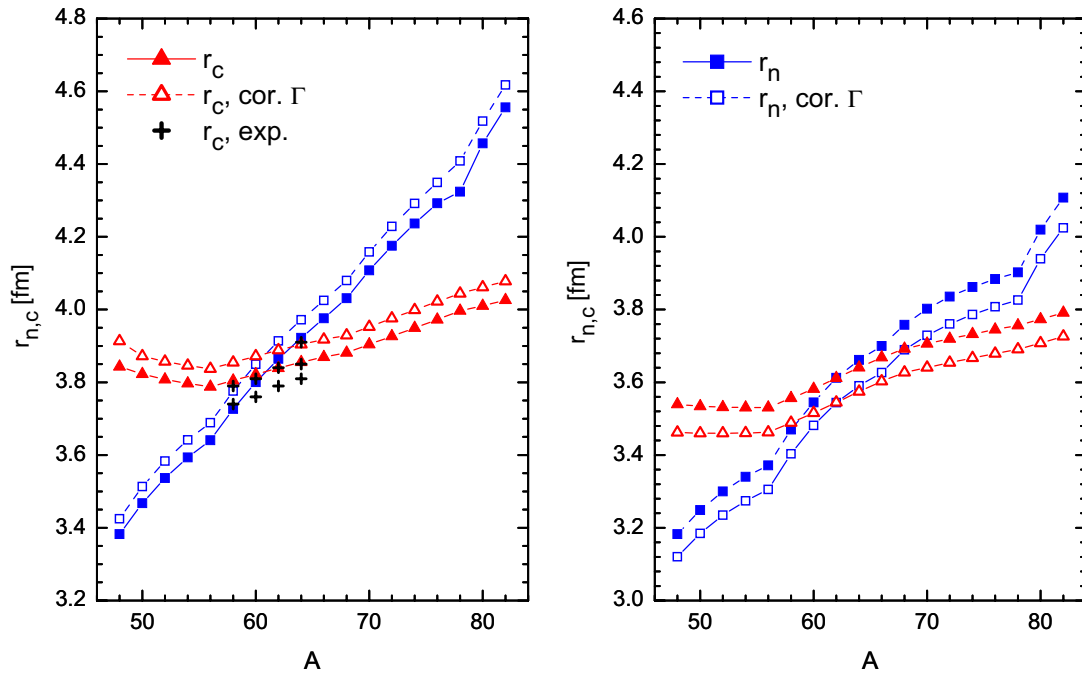


Abb. 6.6: Mittlere Neutronen- (Quadrate) und Ladungsradien (Dreiecke) der Ni-Isotope, berechnet mit dem Bonn A (links) und dem Groningen (rechts) Parametersatz. Gefüllte Symbole repräsentieren Rechnungen mit den DB-Parametrisierungen aus Kernmaterie, bei den offenen Symbolen wurden die Impulskorrekturfaktoren an endliche Kerne angepaßt. Zum Vergleich werden die wenigen experimentell gemessenen Ladungsradien (entnommen aus [60]) gezeigt.

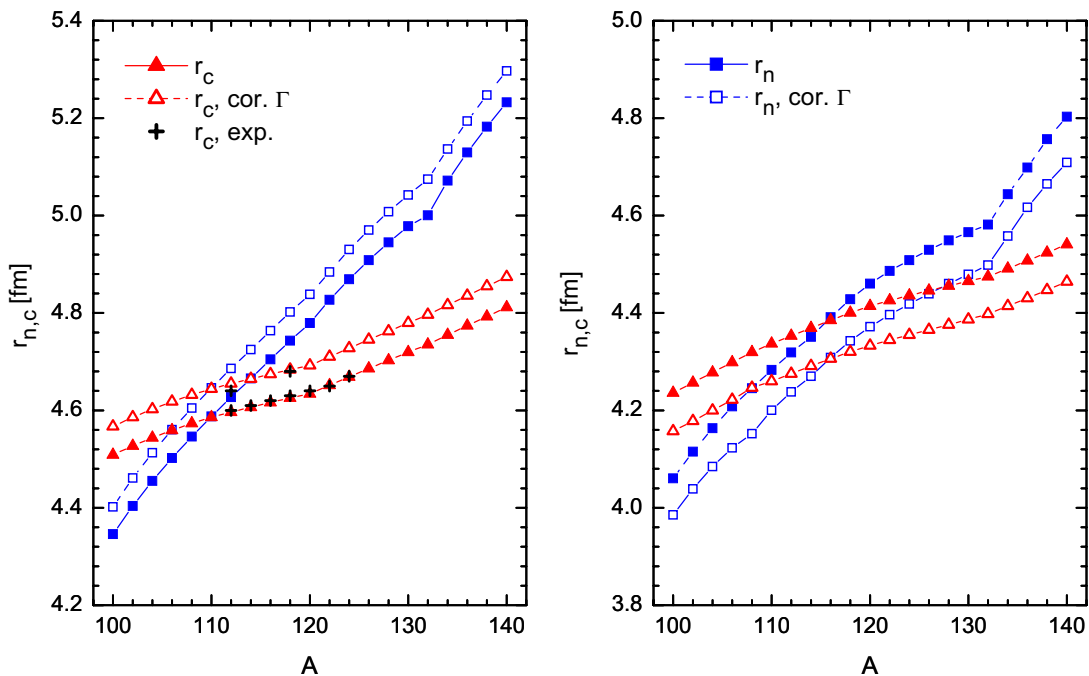
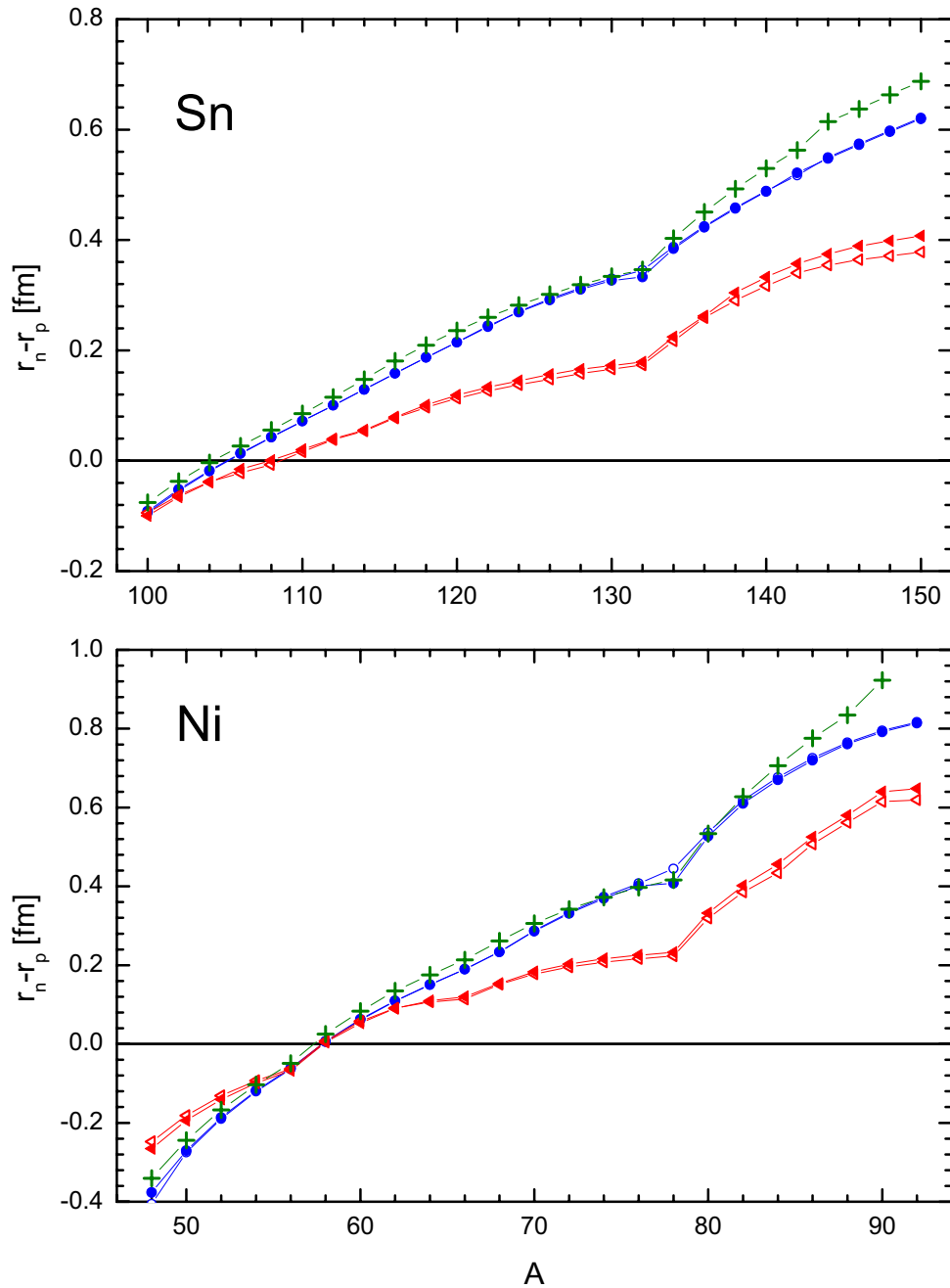


Abb. 6.7: Analog Abbildung 6.6, jedoch mit Ergebnissen für die Sn-Isotopenkette.



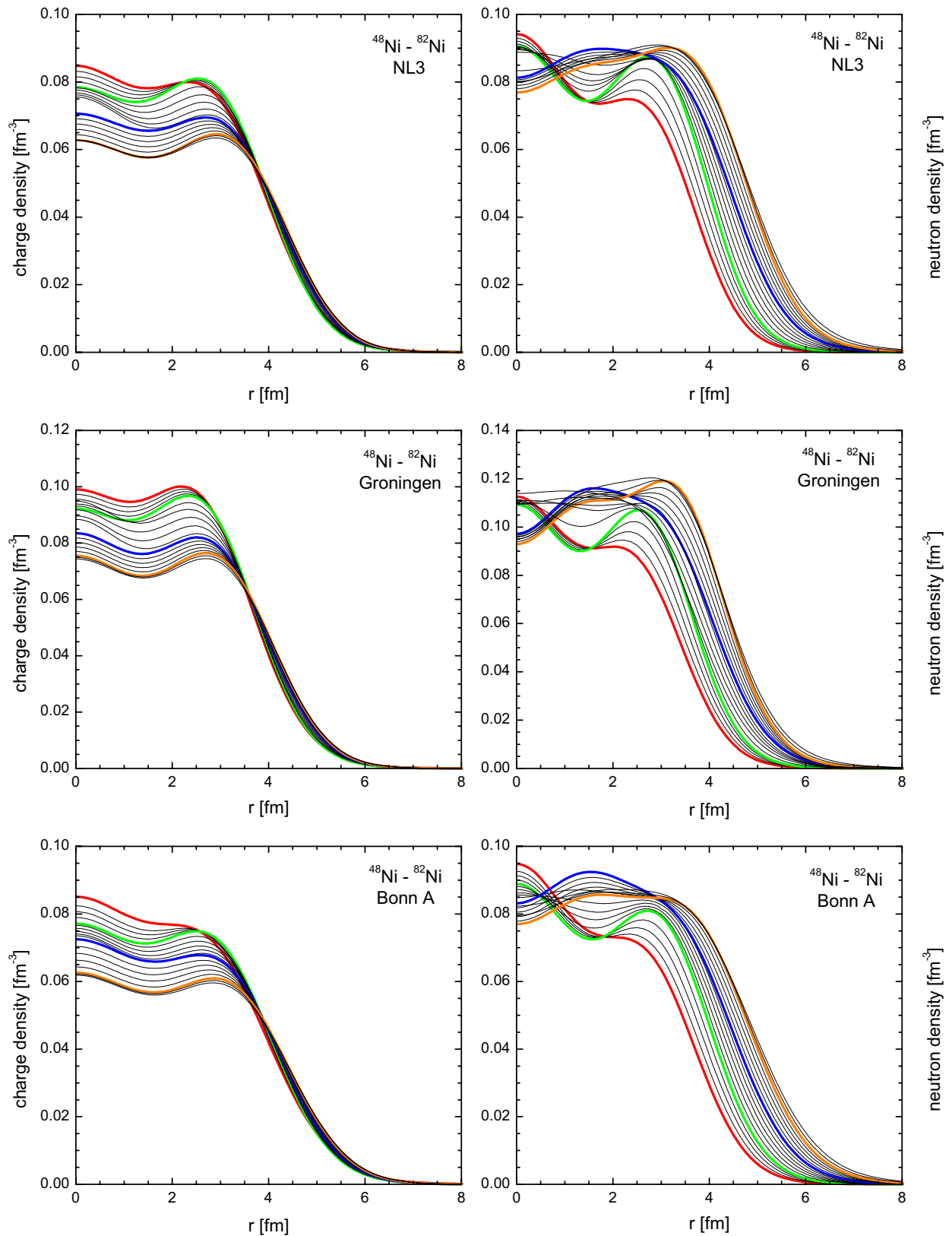
**Abb. 6.8:** Abhängigkeit der Differenz der Neutronen- und Ladungsradien der Ni- (unten) und Sn-Isotope (oben) von der Nukleonenzahl. Ergebnisse berechnet mit dem Bonn A (Kreise) und dem Groningen (Dreiecke) Parametersatz werden mit der phänomenologischen NL3 Wechselwirkung (Kreuze) verglichen. Gefüllte Symbole repräsentieren Rechnungen mit den DB-Parametrisierungen aus Kernmaterie, bei den offenen Symbolen wurden die Impulskorrekturfaktoren an endliche Kerne angepaßt.

Daraus resultiert der starke Anstieg des Neutronenradius. Auch hier sind die Ergebnisse unabhängig von der Impulskorrektur, da eine simultane vertikale Verschiebung von Protonen- und Neutronenradien deren Differenz nicht beeinflusst.

Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Radien der Sn-Isotope in Abbildung 6.7. Auch hier liefert das Bonn A Potential eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Ladungsradien und das Groningen Potential unterschätzt diese um etwa 5%. Der unterschiedlich starke Zuwachs der Ladungs- und Neutronenradien ist bei dem schwereren Zinn etwas weniger ausgeprägt als beim leichteren Nickel. Hier bewirken die 40 zusätzlichen Neutronen zwischen  $^{100}\text{Sn}$  bis  $^{140}\text{Sn}$  nur eine Zunahme der Neutronenradien um 18-20%. Die Ladungsradien wachsen dagegen um 7-9%. Abbildung 6.8 zeigt, dass auch für die Sn-Isotope die Übereinstimmung zwischen der Bonn A und der NL3 Wechselwirkung hervorragend ist. Wie bei den Ni-Isotopen erkennt man auch hier eine dicke Neutronenhaut jenseits von  $^{132}\text{Sn}$  ( $N=82$  Schalenabschluss), wo die  $1h_{11/2}$  Schale abgeschlossen ist und die  $2f_{7/2}$  Unterschale aufgefüllt wird. Eine echte Protonenhaut entsteht hingegen bei den untersuchten Isotopen nicht. Ähnliche Ergebnisse für die Sn-Isotope wurden auch in Rechnungen mit einer nicht-relativistischen  $G$ -Matrix gefunden [34].

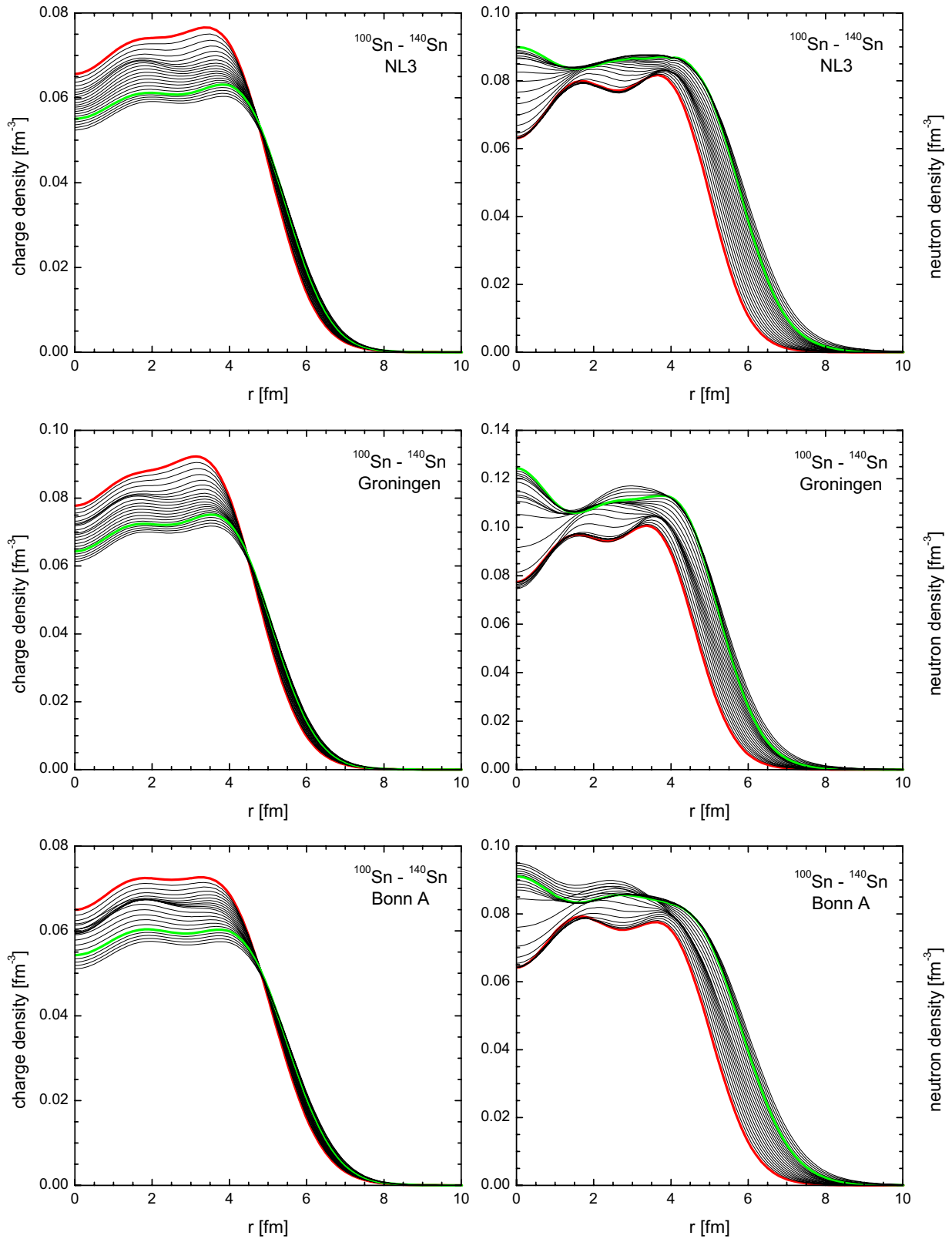
Abschließend werden die Ladungs- und Neutronendichten der betrachteten exotischen Kerne untersucht. Abbildung 6.9 zeigt Ergebnisse für die Ni-Isotope ( $^{48}\text{Ni}$  bis  $^{82}\text{Ni}$ ), Abbildung 6.10 Ergebnisse für die Sn-Isotope ( $^{100}\text{Sn}$  bis  $^{140}\text{Sn}$ ). Bei allen Wechselwirkungen zeigt die Ladungsdichte das gleiche Verhalten: Die zusätzlichen Neutronen ziehen die Protonen aus dem Kerninnern nach außen, was den leichten Anstieg der Ladungsradien erklärt. Dies führt zu einer Reduzierung der Ladungsdichte im Kerninnern, die bis zu 30% betragen kann. Das Groningen Potential besitzt für alle Kerne eine im Vergleich zur NL3 und Bonn A Wechselwirkung höhere Ladungsdichte im Kerninnern, was auch schon in Abbildung 5.8 beobachtet wurde. Bei den Sn-Isotopen bewirken zusätzliche Neutronen einen Anstieg der Neutronendichte im Kerninnern und zusätzlich eine Verschiebung der Kernoberfläche zu größeren Radien. Beides zusammen lässt die Neutronenradien stark anwachsen. Die verwendeten Wechselwirkungen zeigen auch hier ein vergleichbares Verhalten. Bei den Ni-Isotopen ist die Situation aufgrund der komplizierten Schalenstruktur etwas komplexer. Die Neutronendichten steigen im Kerninnern wegen der vielen Schalenabschlüsse nicht monoton an. Vielmehr bewirkt jede neu abgeschlossene Schale hauptsächlich eine Änderung des Dichteverhaltens im Kerninnern. Dafür wächst die Oberfläche der Kerne umso schneller, wodurch der rasche Anstieg der Radien erklärt wird. Alle drei Wechselwirkungen zeigen leicht unterschiedliche Dichteprofile im Kerninnern, da ihr verschieden starkes Spin-Bahn-Potential die Wellenfunktionen und Einteilchenenergien modifiziert. Insbesondere führt dies zu anderen BCS-Besetzungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände.

Die beobachteten starken Neutronenhäute in den neutronenreichen Ni- und Sn-Isotopen sind keine spezifische Eigenschaft der betrachteten Wechselwirkungen. Die Tatsache, dass man das gleiche Verhalten auch bei nicht-relativistischen phänomenologischen und mikroskopischen Wechselwirkungen findet [34], weist darauf hin, dass das Auftauchen von Neutronenhäuten relativ unabhängig von der verwendeten Wechselwirkung und dem theoretischen Modell ist. Die quantitativen Eigenschaften wie z.B. die Dicke der Haut sind jedoch modellabhängig.



**Abb. 6.9:** Neutronen- und Ladungsdichteverteilungen der Ni-Isotope, berechnet mit dem Bonn A, dem Groningen und dem NL3 Parametersatz. Isotope mit abgeschlossenen Neutronenschalen sind durch dicke Linien gekennzeichnet.





**Abb. 6.10:** Neutronen- und Ladungsdichteverteilungen der Sn-Isotope, berechnet mit dem Bonn A, dem Groningen und dem NL3 Parametersatz. Isotope mit abgeschlossenen Neutronenschalen sind durch dicke Linien gekennzeichnet.

### 6.3 Vergleich mit der semiempirischen Massenformel

Der Vergleich mit den experimentellen Bindungsenergien der Ni- und Sn-Isotope lässt vermuten, dass der Isovektorkanal der mikroskopischen Wechselwirkungen in endlichen Kernen zu schwach sein könnte. Eine weitere Ursache für den Unterschied zwischen theoretischen und experimentellen Werten könnte auch in der Beschreibung der Kernoberfläche liegen, die hauptsächlich durch die Dichteabhängigkeit der Vertizes bestimmt wird. Um diese Eigenschaften genauer zu untersuchen, kann man aus den berechneten Bindungsenergien mit Hilfe einer semiempirischen Massenformel Symmetrie-, Volumen- und Oberflächenenergie der Wechselwirkung extrahieren. Wir verwenden den Ansatz

$$E_b/A(N, Z) = -a_v + a_s A^{-1/3} + a_c Z^2 A^{-4/3} + k_v \frac{(N - Z)^2}{A^2} + k_s A^{-1/3} \frac{(N - Z)^2}{A^2}, \quad (6.2)$$

der auf dem Tröpfchenmodell basiert. Der Volumenenergiekoeffizient  $a_v$  entspricht der Sättigungsenergie symmetrischer Kernmaterie, da dort keine Oberflächen oder Symmetrieeffekte beitragen. Der Koeffizient  $a_c$  trägt der Coulomb-Repulsion der Protonen Rechnung und  $a_s$  ist der Koeffizient der Oberflächenenergie. Die unterschiedliche Anzahl von Protonen und Neutronen wird durch den Koeffizienten  $k_v$  der Symmetrienergie parametrisiert. Streng genommen handelt es sich hierbei nur um die Volumensymmetrie. Wir führen deshalb noch den Koeffizienten  $k_s$  ein, der die Oberflächensymmetrie beschreibt. Dieser könnte interessant für die quantitative Beschreibung der beobachteten Neutronenhäute sein.  $k_s$  ist im ursprünglichen Tröpfchenmodell nicht vorhanden. Er wird jedoch in verfeinerten Ansätzen wie dem Finite-Range-Liquid-Drop (FRLDM) oder dem Finite-Range-Droplet (FRDM) Modell verwendet, die auch Kerndeformationen und Schalenkorrekturen berücksichtigen [25]. Diese mikroskopisch-makroskopischen Modelle<sup>2</sup> erlauben eine hervorragende Beschreibung der experimentellen Massen. Aufgrund ihrer vielen Parameter (je nach Zählweise 15 bis 35) lassen sie sich jedoch für unsere einfache systematische Untersuchung nur schwer verwenden.

Die Parameter in Gl. (6.2) werden durch einen Fit an die Bindungsenergien der Ni- (<sup>48</sup>Ni bis <sup>82</sup>Ni) und Sn-Isotope (<sup>100</sup>Sn bis <sup>140</sup>Sn) sowie der doppelt magischen Kerne aus Kapitel 5 bestimmt. Die mittlere quadratische Abweichung  $\chi^2$  beträgt für diese 44 Kerne je nach verwendeter Wechselwirkung zwischen  $4 \times 10^{-3}$  und  $2 \times 10^{-2}$ , die Bindungsenergien werden also sehr zuverlässig beschrieben. Dabei wurde der Volumenenergiekoeffizient  $a_v$  an die Sättigungsenergie in Kernmaterie angepasst und während des Fits festgehalten. Ergebnisse werden in Tabelle 6.1 für die verschiedenen Wechselwirkungen gezeigt.

Um die allgemeine Qualität des Fits für betrachteten Kerne zu überprüfen, wurden auch die Koeffizienten für die experimentellen Bindungsenergien der 44 Kerne bestimmt (in der Tabelle durch „Experiment“ gekennzeichnet). Die Volumenenergie wurde bei 15.6 MeV fixiert, um einen Vergleich mit [89] zu ermöglichen. Dort wurden die Parameter durch eine Analyse hunderter empirischer Massen bestimmt. Die Übereinstimmung beider Rechnungen ist (bis auf die kleine Differenz für  $k_v$ ) hervorragend. Zum Vergleich dieser Ergebnisse mit den unterschiedlichen Wechselwirkungen

<sup>2</sup>auch MicMac genannt

	$a_v$	$a_s$	$k_v$	$k_s$	$a_c$
Referenz [89]	15.6	17.2	22.5	—	0.70
Experiment	<b>15.6</b>	16.9	17.1	-30.0	0.71
	<b>15.6</b>	17.0	23.5	—	0.70
	15.8	17.5	24.1	—	0.72
	16.0	18.0	24.7	—	0.74
NL3	<b>16.2</b>	18.3	25.0	5.1	0.77
	<b>16.2</b>	18.2	24.0	—	0.78
	15.6	16.8	22.3	—	0.72
	15.8	17.3	22.9	—	0.74
	16.0	17.7	23.4	—	0.76
Bonn A NM	<b>16.3</b>	18.2	25.5	21.9	0.78
	<b>16.3</b>	18.1	20.9	—	0.78
	15.6	16.3	18.9	—	0.72
	15.8	16.8	19.5	—	0.73
	16.0	17.3	20.0	—	0.75
Bonn A FN	<b>15.8</b>	16.3	16.9	-23.4	0.80
	<b>15.8</b>	16.5	21.8	—	0.79
	15.6	16.0	21.3	—	0.77
	16.0	16.9	22.4	—	0.80
Groningen NM	<b>15.6</b>	19.3	18.7	-6.5	0.81
	<b>15.6</b>	19.4	20.1	—	0.80
	15.8	19.8	20.6	—	0.82
	16.0	20.3	21.2	—	0.84
Groningen FN	<b>16.6</b>	20.4	20.7	-2.3	0.82
	<b>16.6</b>	20.4	20.2	—	0.81
	15.6	18.0	17.9	—	0.72
	15.8	18.5	18.5	—	0.74
	16.0	18.9	19.0	—	0.76

**Tab. 6.1:** Parameter der semiempirischen Massenformel in MeV, bestimmt für die mikroskopischen Bonn A und Groningen Parametrisierungen sowie für die phänomenologische NL3 Wechselwirkung. Ergebnisse werden gezeigt für in Kernmaterie (NM) und in endlichen Kernen (FN) bestimmte, impulskorrigierte Parametersätze. Zusätzlich wurden die Koeffizienten aus experimentellen Massen bestimmt. Zum Vergleich sind empirische Werte aus [89] dargestellt.

wurden Rechnungen mit unterschiedlichen, festgehaltenen Volumenenergiekoeffizienten  $a_v$  durchgeführt. Werte in Fettdruck kennzeichnen die Sättigungsenergie der jeweiligen Wechselwirkung in symmetrischer Kernmaterie. Man erkennt sofort die extreme Variation des Koeffizienten  $k_s$  der Oberflächenasymmetrie innerhalb der verschiedenen Wechselwirkungen. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass  $k_s$  mit einem sehr großen Fehler (20 – 40 MeV) behaftet ist und nicht zuverlässig aus den vorliegenden Daten bestimmt werden kann<sup>3</sup>. Die Ursache hierfür ist, dass  $k_v$  und  $k_s$  sehr stark korreliert sind, also keine klare Trennung zwischen Oberflächen- und Volumenasymmetrie möglich ist. Wir werden uns deshalb auf die Diskussion von  $a_v$ ,  $a_s$  und  $k_v$  beschränken.

Um den Einfluss von  $a_v$  auf die übrigen Parameter zu untersuchen, wurden zusätzliche Rechnungen mit den festen Werten  $a_v = 15.6, 15.8, 16.0$  durchgeführt. Man erkennt, dass eine Erhöhung von  $a_v$  um 0.2 MeV zu einer Änderung der Oberflächen- und Symmetrieenergie um jeweils +0.5 MeV führt, während die Coulombenergie nur um +0.02 MeV ansteigt. Die Koeffizienten der NL3 Wechselwirkung stimmen im Rahmen der Fehlergrenzen des Fits sehr gut mit den experimentellen Werten und [89] überein, was aufgrund ihrer hervorragenden Beschreibung von Kerneigenschaften zu erwarten war. Die Bonn A Parametrisierung besitzt eine etwas zu kleine Oberflächenenergie, der Hauptgrund für die Abweichung bei den exotischen Kernen scheint jedoch in der um etwa 4 MeV zu kleinen Symmetrieenergie zu liegen. Die Anpassung der Impulskorrektur an endliche Kerne verbessert die Ergebnisse deutlich. Die Oberflächenenergie verringert sich zwar um ca. 0.4 MeV, die Symmetrieenergie liegt jedoch 2.5 MeV näher an den empirischen Werten. Man beobachtet auch eine Erhöhung der Coulombenergie um 0.06 MeV, was die größeren Ladungsdichten im Kerninnern und die damit verbundenen kleineren Ladungsradien erklärt.

Dies bemerkt man auch bei der Groningen Wechselwirkung, die die Ladungsdichten deutlich überschätzt (Kapitel 5). Deshalb ist der zu große Wert von  $a_c = 0.81$  MeV nicht überraschend. Die in Kernmaterie bestimmte Parametrisierung unterschätzt wie das Bonn A Potential die Symmetrieenergie um bis zu 3 MeV, zusätzlich ist die Oberflächenenergie um 2 MeV zu groß. Dies lässt sich erklären mit der allgemein zu schwachen Bindungsenergie des Groningen Potentials. Für endliche Kerne bestimmte impuls-korrigierte Kopplungen führen hier zu einer Reduzierung der Oberflächenenergie um 1.5 MeV, wodurch Bindungsenergie gewonnen und eine bessere Übereinstimmung mit den empirischen Werten erreicht wird. Allerdings geht dies einher mit einer Abnahme der bereits zu niedrigen Symmetrieenergie um weitere 2 MeV. Dies bestätigt unsere Annahme einer zu schwachen Isektorwechselwirkung.

## 6.4 Zusammenfassung

Das Groningen und das Bonn A NN-Potential beschreiben die Eigenschaften der exotischen Kerne der Ni- und Sn-Isotopenketten mit zufriedenstellender Genauigkeit. Insbesondere die mit der Bonn A Parametrisierung erzielten Ergebnisse für mittlere Radien

<sup>3</sup>Ein Vergleich mit dem Wert  $\kappa_s = -k_s/a_s = 2.345$  aus dem FRLD-Modell zeigt, dass die experimentellen Bindungsenergien diesen mit  $\kappa_s = -(-30.1)/16.9 = 1.78$  näherungsweise reproduzieren. Beide Modelle sind jedoch zu unterschiedlich, um genauere Schlussfolgerungen zu erlauben

und Neutronen-Hautdicken sind in hervorragender Übereinstimmung mit experimentellen Daten bzw. phänomenologischen Wechselwirkungen. Das Groningen Potential neigt hier, wie schon für magische Kerne in Kapitel 5 beobachtet, zu einer deutlichen Unterschätzung der Radien. Die Rechnungen sagen bei den Nickel-Isotopen für  $N \geq 52$  ( $^{80}\text{Ni}$ ) und bei den Zinn-Isotopen für  $N \geq 84$  ( $^{134}\text{Sn}$ ) dicke Neutronen-Häute voraus, die für das Bonn A Potential stärker ausgeprägt sind als für das Groningen Potential.

Eine genauere Untersuchung der Schalenstruktur zeigt, dass beide Wechselwirkungen die Schalenabschlüsse der Ni- und Sn-Isotope korrekt beschreiben und die experimentellen Zwei-Neutronen-Separationsenergien gut wiedergeben. Auch die in BCS-Näherung berechneten Paarungs-Gaps und -energien bestätigen dies und sind in guter Übereinstimmung mit Hartree-Bogoliubov-Rechnungen. Es zeigen sich jedoch teilweise vom Experiment leicht abweichende Schalen-Gaps. So sind z.B. die Schalenabschlüsse bei  $^{56}\text{Ni}$  (Groningen) bzw.  $^{68}\text{Ni}$  (Bonn A) zu stark und bei  $^{132}\text{Sn}$  (Bonn A) zu schwach ausgeprägt. Die Ursache sind die schon in Kapitel 5 beobachteten Differenzen in der Spin-Bahn-Aufspaltung der unterschiedlichen Parametrisierungen. Der Einfluß der Impulskorrektur ist hierbei vernachlässigbar.

Die korrekte Beschreibung der Bindungsenergien ist bei beiden Wechselwirkungen nicht simultan für neutronenarme und neutronenreiche Isotope möglich, was auf eine zu schwache Isektorwechselwirkung in endlichen Kernen schließen lässt. Der Vergleich mit den Koeffizienten der semiempirischen Massenformel für das Bonn A Potential bestätigt diese Vermutung. Hier liefert die impulskorrigierte Parametrisierung deutlich bessere Ergebnisse. Die Symmetrieenergie (und damit die Isektorwechselwirkung) ist zwar immer noch etwas zu klein, liegt aber näher am empirischen Wert als für den statischen Fit an die Selbstenergien.

Die Parametrisierung des Groningen Potentials liefert in endlichen Kernen eine zu große Coulombenergie, wodurch sich die überhöhten Ladungsdichten im Kerninnern erklären lassen. Auch hier findet man eine zu kleine Symmetrieenergie, der Hauptgrund für die systematische Unterschätzung der Bindungsenergien ist jedoch (neben der zu geringen Sättigungsenergie  $a_v$ ) die zu hohe Oberflächenenergie. Diese steht in direkter Verbindung mit der Dichteabhängigkeit der Vertizes an der Kernoberfläche und kann nur geringfügig durch die Impulskorrektur verändert werden. Da dies aber zu einer zusätzlichen Reduzierung der Symmetrieenergie führt, muss die Qualität des Groningen Potentials als etwas geringer als die Qualität des Bonn A Potentials eingeschätzt werden. Eine Bestimmung des Symmetriekoeffizienten der Oberflächenenergie war aus den vorliegenden Daten nicht möglich, da er zu stark mit der Volumenasymmetrie korreliert ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beide Wechselwirkungen in Anbetracht ihres mikroskopischen Charakters eine gute Beschreibung der experimentellen Daten stabiler und exotischer Kerne ermöglichen. Im Vergleich zu phänomenologischen Wechselwirkungen sind die mikroskopischen Wechselwirkungen im Dichtebereich zwischen  $0.5\rho_0$  und  $\rho_0$  weniger stark attraktiv, was teilweise die zu schwache Bindung einiger Isotope erklären kann. Dirac-Brückner-Rechnungen, die über die Leiter-Näherung hinausgehen und Diagramme höherer Ordnung wie z.B. Polarisationsdiagramme berücksichtigen, sollten eine Verbesserung der Ergebnisse ermöglichen. Hier ist zur besseren Beschreibung der Kernoberfläche insbesondere der Dichtebereich unterhalb  $0.5\rho_0$

entscheidend. Auch Dreikörperkräfte, deren Effekt in phänomenologischen Wechselwirkungen implizit parametrisiert wird, sollten in den mikroskopischen Modellen explizit berücksichtigt werden und könnten zu einer verbesserten Beschreibung der Bindungsenergie führen.

## Teil III

# Strangeness und Neutronensterne





# Kapitel 7

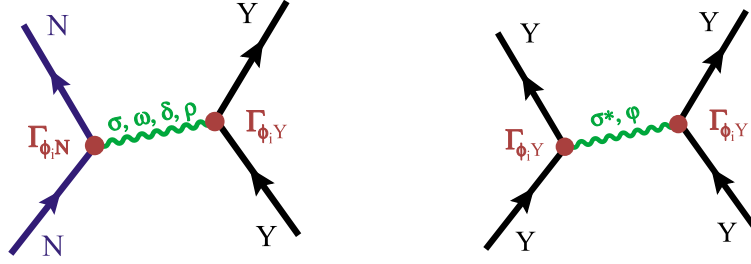
## Dichteabhängige Y–N Feldtheorie

Im dritten Teil dieser Arbeit wird die in Kapitel 2 vorgestellte dichteabhängige relativistische Hadronenfeldtheorie (DDRH) auf die Beschreibung von Hyperonen ausgeweitet. Dabei wird das komplette Oktett der Spin- $\frac{1}{2}$  Baryonen, dessen Eigenschaften in Tabelle 7.1 gezeigt werden, berücksichtigt.

Die Hyperonen (Y) koppeln in Analogie zu den Nukleon (N) an Mesonen  $\alpha$ , jedoch ist die Stärke dieser Meson–Hyperon–Vertizes  $\Gamma_{\alpha Y}$  verschieden von den Meson–Nukleon–Vertizes  $\Gamma_{\alpha N}$ . Man sich dies durch ein einfaches Quark–Modell veranschaulichen. Wenn man annimmt, dass die s-Quarks der Hyperon nicht an die u- und d-Quarks der ausgetauschten Mesonen koppeln, erwartet man eine Reduzierung der Stärke der Hyperonen–Kopplung im Vergleich zur Nukleon–Kopplung. Dadurch ergeben sich neben der bereits untersuchten NN–Wechselwirkung noch zusätzliche YN- und YY–Wechselwirkungen, die in Abbildung 7.1 diagrammatisch dargestellt werden. Diese Wechselwirkungen spielen eine wichtige Rolle in Neutronensternen, da sich in diesen aufgrund der dort herrschenden extrem hohen Dichten Nukleonen in Hyperonen umwandeln können. Neutronensterne erlauben es deshalb auch, Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Nukleon- und Hyperon–Wechselwirkung bei hohen Dichten zu ziehen.

Baryon	Q	S	T <sub>3</sub>	Y	Masse [MeV]
n	0	0	-1/2	+1	939.0
p	+1	0	+1/2	+1	938.9
$\Lambda$	0	-1	0	0	1115.7
$\Sigma^-$	-1	-1	-1	0	1197.4
$\Sigma^0$	0	-1	0	0	1192.6
$\Sigma^+$	+1	-1	+1	0	1189.4
$\Xi^-$	-1	-2	-1/2	-1	1321.3
$\Xi^0$	0	-2	+1/2	-1	1314.9

**Tab. 7.1:** Baryonen des Spin- $\frac{1}{2}$  Oktetts, unterteilt in die vier  $SU(3)_f$  Multipletts  $B = N, \Lambda, \Sigma, \Xi$ , und seine Quantenzahlen Q (Ladung), S (Strangeness), T<sub>3</sub> (Isospin) und Y=B+S (Hyperladung, Baryonenzahl B). Siehe auch Abbildung 4.



**Abb. 7.1:** Schematische Darstellung der YN– (links) und YY–Wechselwirkung (rechts) durch Mesonsaustausch zwischen Nukleonen und Hyperonen.

Dem mikroskopischen Ansatz dieser Arbeit folgend, sollte auch die Hyperon–Wechselwirkung durch aus Dirac–Brückner–Rechnungen für Hyperonen bestimmte dichteabhängige Vertizes  $\Gamma_{\alpha Y}$  beschrieben werden. Dies ist jedoch zur Zeit noch nicht möglich, was vor allem an fehlenden experimentellen Daten für YN- und YY–Streuung liegt. Wir werden deshalb in diesem Kapitel ein semiempirisches Verfahren vorstellen, mit dem die Vertizes auch aus DB–Rechnungen für Nukleonen und experimentellen Daten für Hyperkerne zuverlässig bestimmen werden können.

In der DDRH–Theorie lassen sich die Hyperonen auf fast die gleiche Weise in die Lagrangedichte integrieren wie in der gewöhnlichen relativistischen Hartree–Theorie (RMF) [90, 91, 92]. Es wurden unter anderem RMF–Rechnungen mit verschiedenen phänomenologischen Wechselwirkungen für seltsame Kernmaterie [93, 94, 95] und Hyperkerne [96, 97, 98, 99, 100] durchgeführt.

Durch die Erweiterung des Isospins zur SU(3) erhält man auch ein Oktett der pseudoskalaren  $0^-$  und der vektoriiellen  $1^-$  Mesonen, in dem zusätzlich zu den Nicht–Strange–Mesonen ( $\pi$ ,  $\eta$  bzw.  $\rho$ ,  $\omega$ ) auch noch Strange–Mesonen (Kaonen  $K$  und  $K^*$ ) auftreten. Wie jedoch bereits in Kapitel 2.3 diskutiert wurde, liefern in Hartree–Näherung die  $0^-$ –Mesonen keinen Beitrag zum Grundzustand von rotationssymmetrischen Systemen. Das Auftreten der vektoriiellen Kaonen  $K^*$  wird hingegen bei Systemen mit einem großen Hyperonenanteil erwartet.

## 7.1 Die Y–N Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der Hadronenfeldtheorie aus Kapitel 2 lässt sich sehr einfach auf die Beschreibung von Hyperonen erweitern [44]. Zur Beschreibung der zusätzlichen baryonischen Freiheitsgrade wird der Nukleonen–Spinor  $\Psi_N = (\psi_n, \psi_p)^T$  in Gl. (2.3) durch den SU(3)<sub>f</sub>–Flavor–Spinor

$$\Psi_F = (\Psi_N, \Psi_\Lambda, \Psi_\Sigma, \Psi_\Xi)^T \quad (7.1)$$

ersetzt. Dieser enthält das komplette Baryonenoktett, das sich aus den SU(3)<sub>f</sub>–Isospin–Multipletts

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_\Lambda = \psi_\Lambda, \quad \Psi_\Sigma = \begin{pmatrix} \psi_{\Sigma^+} \\ \psi_{\Sigma^0} \\ \psi_{\Sigma^-} \end{pmatrix}, \quad \Psi_\Xi = \begin{pmatrix} \psi_{\Xi^0} \\ \psi_{\Xi^-} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

zusammensetzt. Die Meson–Baryon–Vertizes werden damit zu Matrizen  $\tilde{\Gamma}(\bar{\Psi}_F, \Psi_F)$ , die jetzt Funktionale der Feldoperatoren im Flavor–Raum sind. Aufgrund des zusätzlichen Strangeness–Freiheitsgrades kann die Wechselwirkung zwischen den Hyperonen durch zusätzliche Strange–Mesonen übertragen werden. In Analogie zum  $\sigma$ – $\omega$ –Modell parametrisiert man diese attraktive Hyperon–Hyperon–Wechselwirkung durch den Austausch des attraktiven skalaren  $\sigma_s$ –Mesons (Masse  $m_{\sigma_s} = 975$  MeV) und des repulsiven vektoriellen  $\phi$ –Mesons (Masse  $m_\phi = 1020$  MeV) [101]. Auch hier repräsentiert das  $\phi$  ein reales Meson, während das  $\sigma_s$  (wie das  $\sigma$ ) als effektive Parametrisierung eines korrelierten Zwei–Kaonen–Austausches interpretiert werden muss. Man erhält damit die Lagrangedichte [44, 102]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} \\ \mathcal{L}_B &= \bar{\Psi}_F \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - \tilde{M}_F \right] \Psi_F\end{aligned}\quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \delta, \sigma_s} \left( \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2 \right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\kappa=\omega, \rho, \phi} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\mu\nu} - m_\kappa^2 A_\mu^{(\kappa)} A^{(\kappa)\mu} \right)\end{aligned}\quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\sigma (\Psi_F \Psi_F) \Psi_F \Phi_\sigma - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\omega (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \Psi_F A^{(\omega)\mu} + \\ &\quad \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\delta (\Psi_F \Psi_F) \boldsymbol{\tau} \Psi_F \boldsymbol{\Phi}_\delta - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\rho (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_F \mathbf{A}^{(\rho)\mu} + \\ &\quad \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_{\sigma_s} (\Psi_F \Psi_F) \Psi_F \Phi_{\sigma_s} - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\phi (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \Psi_F A^{(\phi)\mu}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Das Photon wird hier nicht berücksichtigt, da keine endlichen Systeme betrachtet werden. Die Diagonal–Matrix  $\tilde{M}$  enthält die freien Baryonenmassen. Die Baryonen der einzelnen Multipletts koppeln unterschiedlich stark an die Mesonen. Man muss deshalb für jedes Meson  $\alpha = \sigma, \omega, \delta, \rho, \sigma_s, \phi$  und jedes Multiplett  $B = N, \Lambda, \Sigma, \Xi$  unterschiedliche Vertizes ansetzen. Da die Lagrangedichte und die Wechselwirkung symmetrisch im Flavor–Raum sein sollen, wird für die Vertizes der folgende Ansatz gewählt:

$$\left( \tilde{\Gamma}_\alpha \right)_{BB'} = \hat{\Gamma}_{\alpha B} \delta_{BB'} \quad (7.6)$$

Ein Flavor–Austausch zwischen wechselwirkenden Baryonen (z.B. durch die  $K^*$ –Mesonen) wird damit nicht berücksichtigt. Dieser liefert in den betrachteten Systemen nur durch den Austauschterm einen Korrekturbeitrag. Der allgemeinste Ansatz für die DDRH Vertex–Funktionale erlaubt es, die Dichteabhängigkeit für jede Meson–Baryon–Kombination unabhängig zu behandeln, und lautet

$$\hat{\Gamma}_{\alpha B} \left( \hat{\rho}_{\alpha B}(\bar{\Psi}_F, \Psi_F) \right). \quad (7.7)$$

Dabei ist der Dichteoperator  $\hat{\rho}_{\alpha B}(\bar{\Psi}_F, \Psi_F)$  wie in Kapitel 2 eine Lorentz–skalare Bilinearform der Baryon–Feldoperatoren. Auch hier betrachten wir nur den Fall der VDD Dichteabhängigkeit, lassen also  $\hat{\rho}_{\alpha B}$  nur von der baryonischen Vektorstromdichte  $\hat{j}_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$  abhängen. Um unterschiedlichen Kombination für jedes Multiplett Rechnung zu tragen, muss in Gl. (2.5) der Koeffizient  $B^\mu$  durch eine Matrix  $\tilde{B}_{\alpha B}^\mu$  ersetzt werden:

$$\hat{\rho}_{\alpha B}[\bar{\Psi}_F, \Psi_F] = \bar{\Psi}_F \tilde{B}_{\alpha B}^\mu \gamma_\mu \Psi_F \quad (7.8)$$

Der Index  $\alpha$  erlaubt es, jedem Meson eine unterschiedliche Dichteabhängigkeiten zuzuweisen. Verschiedene Wahlen der Matrix  $\tilde{B}_{\alpha B}^\mu$  und ihre physikalische Bedeutung werden im nächsten Abschnitt noch detailliert diskutiert.

Die Variation der Lagrangedichte

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \bar{\Psi}_F} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \bar{\Psi}_F} + \sum_{\alpha, B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}_{\alpha B}} \frac{\delta \hat{\rho}_{\alpha B}}{\delta \bar{\Psi}_F} \quad (7.9)$$

ergibt die aus Kapitel 2 bekannten Bewegungsgleichungen für die Mesonenfelder. Der einzige Unterschied ist, dass in Gl. (2.9)–(2.13) die Funktionale  $\hat{\Gamma}(\hat{\rho}_0)$  durch die Flavor–Raum–Matrizen  $\tilde{\Gamma}(\hat{\rho}_{\alpha B})$  ersetzt werden müssen. Der erste Term der Variation aus Gl. (7.9) ergibt die skalaren und vektoriellen Selbstenergien (vergleiche Gl. (2.18) und Gl. (2.19))

$$\tilde{\Sigma}^{s(0)} = \tilde{\Gamma}_\sigma \Phi_\sigma + \tilde{\Gamma}_\delta \boldsymbol{\tau} \Phi_\delta + \tilde{\Gamma}_{\sigma_s} \Phi_{\sigma_s} \quad (7.10)$$

$$\tilde{\Sigma}^{\mu(0)} = \tilde{\Gamma}_\omega A^{(\omega)\mu} + \tilde{\Gamma}_\rho \boldsymbol{\tau} \mathbf{A}^{(\rho)\mu} + \tilde{\Gamma}_\phi A^{(\phi)\mu}. \quad (7.11)$$

Der zweite Term in Gl. (7.9) liefert die Rearrangementenergien. Es muss jetzt jedoch aufgrund anderer funktionaler Abhängigkeit des Dichteoperators über die Indizes  $\alpha$  und  $B$  summiert werden. Durch die Wahl des Dichteoperators (VDD Dichteabhängigkeit) ergibt sich nur ein vektorieller Beitrag

$$\tilde{\Sigma}^{\mu(r)} = \sum_{\alpha, B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}_{\alpha B}} \tilde{B}_{\alpha B}^\mu \quad (7.12)$$

zur Rearrangementenergie. Seine Struktur ist jedoch komplizierter als Gl. (2.25). Die Dirac–Gleichung für den Flavor–Spinor lautet damit in Analogie zu Gl. (2.21)

$$\left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - \tilde{\Sigma}^{\mu(0)} - \tilde{\Sigma}^{\mu(r)} \right) - \left( \tilde{M} - \tilde{\Sigma}^s \right) \right] \Psi_F = 0. \quad (7.13)$$

## 7.2 Dichteabhängigkeit der Vertices

Die Dichteabhängigkeit der Hyperon–Meson–Vertex–Funktionale sollte prinzipiell wie in Kapitel 3 direkt aus DB–Rechnungen für seltsame Kernmaterie bestimmt werden. Solche Rechnungen müssten unter Berücksichtigung des kompletten Baryonen–Oktetts durchgeführt werden. Komplette Rechnungen existieren jedoch noch nicht und sind in absehbarer Zeit auch nur schwer durchführbar. Dies liegt zum einen an fehlenden experimentellen Daten aus der Hyperon–Nukleon–Streuung und zum anderen an der komplizierten Propagator–Struktur der in DB–Rechnungen zu verwendenden Wechselwirkung. Nicht-relativistische Rechnungen mit mikroskopischen Wechselwirkungen, aufbauend auf z.B. den YN- bzw. YY–Potentialen aus [103, 104], sind von verschiedenen Gruppen durchgeführt worden [105, 106, 107]. Ihre Ergebnisse für seltsame Materie können jedoch in relativistischen Rechnungen nicht zur Extraktion der Dichteabhängigkeit verwendet werden. Dies liegt an der unterschiedlichen Struktur der nicht-relativistischen Einteilchenpotentiale, die nicht durch stark attraktive und repulsive Felder wie in relativistischen Theorien erzeugt werden. Wir wählen deshalb

einen semiempirischen Ansatz und bestimmen die dichteabhängigen Kopplungen der YY- und YN-Wechselwirkung aus der mikroskopischen Dichteabhängigkeit der Meson-Nukleon-Vertices aus Kapitel 3.

Wir beschäftigen uns als erstes nur mit der funktionalen Abhängigkeit der Vertices von den Feldoperatoren und diskutieren im nächsten Abschnitt, wie die Stärke der Hyperon-Wechselwirkung bestimmt werden kann. Ein sehr anschaulicher und relativ einfacher Ansatz für die Dichteabhängigkeit ist, die Vertices aller Baryonen-Multipletts von der Gesamtbaryondichte  $\hat{\rho}_T$  abhängen zu lassen, die als

$$\hat{\rho}_T = \sqrt{\hat{j}_\mu^F \hat{j}^{\mu F}} \quad (7.14)$$

definiert ist. Man fordert also

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda}(\hat{\rho}_T), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma}(\hat{\rho}_T), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi}(\hat{\rho}_T). \quad (7.15)$$

Dieser Ansatz ist motiviert aus der Beobachtung, dass auch in asymmetrischer Kernmaterie die Meson-Nukleon-Vertices in sehr guter Näherung unabhängig von der Isevektordichte sind und nur durch die Gesamtdichte parametrisiert werden können (Kapitel 2.3). Verallgemeinert auf das  $SU(3)_f$ -Oktett bedeutet dies, dass die Meson-Baryon-Vertices als unabhängig von der Flavor-Asymmetrie angenommen werden. Wir werden diesen Ansatz als Modell 1 bezeichnen.

Diese Wahl der gleichen Gesamtdichteabhängigkeit für alle Baryonen ist äquivalent zur Definition der Matrix  $\tilde{B}_\mu^{\alpha B}$  in Gl. (7.8) als

$$\tilde{B}_\mu^{\alpha B} \equiv \tilde{B}_\mu = \hat{u}_\mu \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad (7.16)$$

wobei  $\hat{u}^\mu$  eine Vierergeschwindigkeit mit  $\hat{u}^\mu \hat{u}_\mu = 1$  ist. Die Rearrangementselbstenergien berechnen sich dann als

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}^{\mu(r)} = & \sum_{B'} \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\omega B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} A_\nu^{(\omega)} \hat{j}_{B'}^\nu + \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\rho B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} A_\nu^{(\rho)} \bar{\Psi}_{B'} \gamma^\nu \boldsymbol{\tau} \Psi_{B'} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\phi B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} A_\nu^{(\phi)} \hat{j}_{B'}^\nu \right. \\ & \left. - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\sigma B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} \Phi_\sigma \hat{\rho}_{B'}^s - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\delta B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} \boldsymbol{\Phi}_\delta \bar{\Psi}_{B'} \boldsymbol{\tau} \Psi_{B'} - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\sigma_s B'}}{\partial \hat{\rho}_{B'}} \Phi_{\sigma_s} \hat{\rho}_{B'}^s \right) \hat{u}^\mu \quad (7.17) \end{aligned}$$

und die skalaren Dichten der einzelnen Multipletts sind definiert als  $\rho_B^s = \bar{\Psi}_B \Psi_B$ . Man erkennt, dass die  $\tilde{\Sigma}^{\mu(r)}$  für alle Baryon-Multipletts identisch sind, obwohl die Vertices der einzelnen Baryonen mit unterschiedlicher Stärke an die Mesonen koppeln können. Da die Vertices jedoch alle von dem selben Argument  $\hat{\rho}_T$  abhängen, muss immer über alle Hyperonen  $B'$  summiert werden.

Als zweite Möglichkeit für die Wahl der Dichteabhängigkeit wird angenommen, dass die Modifikation der Vertices im Medium nur durch umgebende Baryonen des selben Multipletts erfolgt, dass also z.B. der  $\Lambda$ -Vertex  $\hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda}(\hat{\rho}_\Lambda)$  nur von der Dichte der  $\Lambda$ -Hyperonen abhängt. Dies wurde in [44] bei der Berechnung von  $\Lambda$ -Hyperkernen untersucht. Erweitert auf das komplette Baryonen-Oktett bedeutet dies

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda}(\hat{\rho}_\Lambda), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma}(\hat{\rho}_\Sigma), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi} = \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi}(\hat{\rho}_\Xi), \quad (7.18)$$

wobei die einzelnen Dichteoperatoren die Vektorstromdichten der entsprechenden Baryonen–Multipletts sind

$$\hat{\rho}_B = \sqrt{\hat{j}_\mu^B \hat{j}^{\mu B}}. \quad (7.19)$$

Wir werden diesen Ansatz als Modell 2 bezeichnen. Diese Wahl der Dichteabhängigkeit entspricht in erster Ordnung dem Ergebnis, dass auch aus DB–Rechnungen erwartet werden kann. Da keine geladenen Mesonen ausgetauscht werden, wird die Dichteabhängigkeit der Vertizes nur durch Pauli–geblockte intermediäre Zustände von Baryonen des gleichen Multipletts erzeugt. Dadurch sollte die Dichteabhängigkeit in erster Ordnung separieren.

In diesem Model ist die Matrix  $\tilde{B}_\mu^{\alpha B}$  aus Gl. (7.8) definiert als

$$\tilde{B}_\mu^{\alpha B} \equiv \tilde{B}_\mu^B = \hat{u}_\mu \text{diag} \left( \delta^{NB}, \delta^{\Lambda B}, \delta^{\Sigma B}, \delta^{\Xi B} \right). \quad (7.20)$$

Man erhält dadurch für jedes Baryonen–Multiplett unterschiedliche Selbstenergien

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_B^{\mu(r)} = & \left( \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\omega B}}{\partial \hat{\rho}_B} A_\nu^{(\omega)} \hat{j}_B^\nu + \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\rho B}}{\partial \hat{\rho}_B} \mathbf{A}_\nu^{(\rho)} \bar{\Psi}_{B'} \gamma^\nu \boldsymbol{\tau} \Psi_{B'} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\phi B}}{\partial \hat{\rho}_B} A_\nu^{(\phi)} \hat{j}_B^\nu \right. \\ & \left. - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\sigma B}}{\partial \hat{\rho}_B} \Phi_\sigma \hat{\rho}_B^s - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\delta B}}{\partial \hat{\rho}_B} \boldsymbol{\Phi}_\delta \bar{\Psi}_{B'} \boldsymbol{\tau} \Psi_{B'} - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\sigma_s B}}{\partial \hat{\rho}_B} \Phi_{\sigma_s} \hat{\rho}_B^s \right) \hat{u}^\mu. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Beide Modelle beschreiben möglicherweise die Resultate zukünftiger DB–Rechnungen über den gesamten Dichtebereich für seltsame Kernmaterie nur teilweise, können aber als gute Näherungen betrachtet werden. Insbesondere sind beide Modelle im unvermischten Fall, z.B. reine  $\Lambda$ -Materie, identisch. Modell 1 nimmt korrekt an, dass der Baryonen–Vertex von allen Multipletts abhängt, gewichtet diese aber nicht unterschiedlich stark. Modell 2 hingegen unterscheidet zwischen den Multipletts, separiert diese allerdings komplett. Bei extrem asymmetrischen Systemen und sehr hohen Dichten ist jedoch zu erwarten, dass alle Baryontypen die Dichteabhängigkeit, wenn auch unterschiedlich stark, beeinflussen werden. Die beiden Modelle stellen somit Extremfälle dar, wobei Modell 1 das erwartete Verhalten bei hohen Dichten und Model 2 die Verhältnisse bei niedrigen Hyperonendichten beschreiben sollte.

Eine realistische Dichteabhängigkeit wird eine Mischung aus beiden Modellen sein und sowohl von der Gesamtdichte als auch von der Dichte der einzelnen Multipletts (oder einer Flavor–Asymmetrie–Dichte) abhängen

$$\hat{\Gamma}_{\alpha B} \equiv \hat{\Gamma}_{\alpha B}(\hat{\rho}_B, \hat{\rho}_T). \quad (7.22)$$

Solange DB–Rechnungen, aus denen eine solche Dichteabhängigkeit extrahiert werden könnte, nicht existieren, erlauben uns beide Ansätze jedoch, die Eigenschaften einer solchen Parametrisierung eingehend zu untersuchen und Rückschlüsse auf realistische YN–Wechselwirkungen zu ziehen.

### 7.3 Bestimmung der Hyperon–Meson–Wechselwirkung

Durch die Untersuchung der Eigenschaften von Dirac–Brückner–Rechnungen in seltener Kernmaterie wurde gezeigt, dass die dichteabhängige in–Medium Hyperon–

Wechselwirkung durch ein einfaches Skalierungsgesetz beschrieben werden kann [44]. Man findet, dass die DB–Wechselwirkung  $\Gamma_{\alpha B}$  in guter Näherung als ein Produkt aus der freien Kopplungsstärke  $\bar{g}_{\alpha\Lambda}$  (aus realistischen Potentialen) und einem dichteabhängigen Renormalisierungsfaktor  $s_{\alpha B}(\rho_B)$  geschrieben werden kann

$$\Gamma_{\alpha B}(\rho_B) = \bar{g}_{\alpha\Lambda} s_{\alpha B}(\rho_B). \quad (7.23)$$

Für die Selbstenergien gilt eine entsprechende Relation. In Hartree–Näherung ergibt sich damit in erster Ordnung, dass sich die Hyperonen- und Nukleonen–Selbstenergien und -Vertizes im Medium zueinander verhalten wie die freien Kopplungskonstanten

$$R_{\alpha Y} = \frac{\Gamma_{\alpha Y}}{\Gamma_{\alpha N}} \simeq \frac{\Sigma_{\alpha Y}}{\Sigma_{\alpha N}} \simeq \frac{\bar{g}_{\alpha Y}}{\bar{g}_{\alpha N}}. \quad (7.24)$$

Durch dieses Skalierungsgesetz ist es nun möglich, im DDRH–Modell über die Relationen

$$\hat{\Gamma}_{\alpha Y}(\hat{\rho}) = R_{\alpha Y} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}) \quad (7.25)$$

die Dichteabhängigkeit der Meson–Hyperon–Vertizes aus DB–Ergebnissen für Kernmaterie zu bestimmen. Für die beiden unterschiedlichen Ansätze der Dichteabhängigkeit aus dem letzten Abschnitt bedeutet die konkret:

- Modell 1:

Die Vertizes hängen von der Gesamtdichte ab, also

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda} = R_{\alpha\Lambda} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_T), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma} = R_{\alpha\Sigma} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_T), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi} = R_{\alpha\Xi} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_T). \quad (7.26)$$

Die Parametrisierung der Dichteabhängigkeit der Hyperonen–Vertizes entspricht damit derjenigen der Nukleonen–Vertizes  $\hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_N)$ , die aus DB–Rechnungen in unendlicher Kernmaterie bestimmt werden, wo  $\hat{\rho}_N \equiv \hat{\rho}_T$  gilt. Dies bedeutet auch, dass die NN–Wechselwirkung durch sich im Medium befindende Hyperonen modifiziert wird. Im Grenzfall verschwindender Hyperonendichte ( $\hat{\rho}_Y \rightarrow 0$ ,  $\hat{\rho}_T \rightarrow \hat{\rho}_N$ ) wird jedoch das ursprüngliche Kopplungsfunktional wiederhergestellt.

- Modell 2:

Die Vertizes hängen von den Baryonen des entsprechenden Multipletts ab, also

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\Lambda} = R_{\alpha\Lambda} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_\Lambda), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Sigma} = R_{\alpha\Sigma} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_\Sigma), \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\Xi} = R_{\alpha\Xi} \hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_\Xi). \quad (7.27)$$

Die Parametrisierung der Dichteabhängigkeit der Hyperonen wird dabei von den Meson–Nukleon–Vertizes  $\hat{\Gamma}_{\alpha N}(\hat{\rho}_N)$  genommen, die aus DB–Rechnungen in unendlicher Kernmaterie bestimmt wurden. Dabei wird die Ersetzung  $\hat{\rho}_N \rightarrow \hat{\rho}_Y$  durchgeführt. Die NN–Wechselwirkung ist unabhängig von den sich im Medium befindenden Hyperonen.

Wie schon erwähnt wurde, ist Modell 2 eine gute Näherung für Brückner–Rechnungen in seltsamer Kernmaterie. Die unterschiedliche Dichteabhängigkeit der Vertizes führt in asymmetrischen Systemen allerdings zu Abweichungen von dem Skalierungsgesetz aus Gl. (7.24), während dieses für Modell 1 immer erfüllt ist. Dies ist

jedoch unproblematisch, da Gl. (7.24) streng genommen nur für symmetrische Hypermaterie mit gleichen Anteilen von Nukleonen und Hyperonen ( $\rho_Y = \rho_N$ ) gültig ist [44]. Sie stellt jedoch auch für asymmetrische Systeme mit  $\rho_Y \ll \rho_B$  eine gute Näherung dar.

In der relativistischen Hartree–Theorie (RMF) mit konstanten Kopplungen lassen sich die phänomenologischen Hyperon- und Nukleon–Vertizes durch die gleichen Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha B}$  miteinander in Verbindung setzen, z.B.  $g_{\omega\Lambda} = R_{\omega\Lambda}g_{\omega N}$ . Für das  $\Lambda$  findet man den Wert  $R_{\omega\Lambda} = 2/3$ . Diese Reduktion der Kopplungsstärke lässt sich direkt aus der  $SU(3)_f$ –Gruppenstruktur motivieren, wenn man annimmt, dass die Kopplungsstärke zwischen Baryonen und Mesonen ohne Strangeness–Inhalt direkt mit den u- und d-Quark–Anteilen der Baryonen skaliert [108]. Eine genauere Untersuchung unter Berücksichtigung von  $SU(6)$ –Symmetrieüberlegungen erlaubt es auch, für die vektoriellen Strange–Mesonen Skalierungsfaktoren zu bestimmen. Zusammenfassend findet man [101]

$$\Gamma_{\omega\Lambda} = \Gamma_{\omega\Sigma} = 2\Gamma_{\omega\Xi} = \frac{2}{3}\Gamma_{\omega N}, \quad \Gamma_{\rho\Sigma} = 2\Gamma_{\rho\Xi} = 2\Gamma_{\rho N}, \quad \Gamma_{\rho\Lambda} = 0, \quad (7.28)$$

$$2\Gamma_{\phi\Lambda} = 2\Gamma_{\phi\Sigma} = 2\Gamma_{\phi\Xi} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\Gamma_{\omega N}, \quad \Gamma_{\phi N} = 0. \quad (7.29)$$

Dabei wird allerdings ideale Mischung angenommen, was bedeutet, dass es sich bei den Mesonen um die vom Quark–Modell vorhergesagten reinen Zustände handelt (z.B.  $\phi = \bar{s}s$ ). In der Natur ist diese einfache Relation jedoch nicht gegeben, da schon die  $SU(3)_f$  Flavor–Gruppe eine relativ stark gebrochene Symmetrie ist. Es sind demzufolge für die  $R_{\alpha B}$  Abweichungen von den reinen  $SU(6)$ –Werten zu erwarten.

Ein weit verbreiteter Ansatz ist, die Stärke der skalaren Kopplungen an die Eigenschaften von Hyperkernen anzupassen [96, 97, 98, 99]. Es ist experimentell teilweise möglich, die Potentiale der Hyperonen in endlichen Kernen aus den Einteilchenbindungsenergien zu extrahieren. Um die korrekte Stärke der YN–Wechselwirkung zu gewährleisten, extrapoliert man daher die Potentialtiefe in endlichen Kernen zu unendlicher Kernmaterie ( $A \rightarrow \infty$ ). Man erhält dann das Potential  $U_Y^{(N)}(\rho_0)$  eines Hyperons Y in gesättigter Kernmaterie (Dichte  $\rho_0$ ). In Übereinstimmung mit [95, 101] wählen wir

$$U_{\Lambda}^{(N)}(\rho_0) = U_{\Sigma}^{(N)}(\rho_0) = -30 \text{ MeV}, \quad U_{\Xi}^{(N)}(\rho_0) = -28 \text{ MeV}. \quad (7.30)$$

Die Stärke des  $\Lambda$ –Potentials wurde unter anderem in [108, 109] bestimmt. Basierend auf der (sehr unsicheren) Analyse der Daten von  $\Sigma^-$ –Kernen wurde beobachtet, dass der Realteil des optischen Potentials negativ ist [110]. Neuere Untersuchungen zeigen jedoch, dass das isoskalare Potential in Kerninnern sein Vorzeichen wechselt und repulsiv wird [111, 112]. Wir haben deshalb auch Rechnungen mit der Potentialtiefe  $U_{\Sigma}^{(N)} = +30 \text{ MeV}$  durchgeführt. Es zeigt sich dann jedoch, dass wegen der Repulsion keine  $\Sigma$ –Hyperonen in der Zusammensetzung der Neutronensternmaterie auftauchen (Kapitel 8). Wir beschränken uns deshalb im weiteren auf die Diskussion der negativen Potentialwahl. Auch die Stärke der  $\Xi$ –Wechselwirkung besitzt große Unsicherheiten [113] mit Potentialtiefen, die zwischen -14 MeV und -28 MeV angenommen werden [114].



	$R_m$		$R_q$			
	$R_{\sigma\Lambda,\Sigma}$	$R_{\omega\Lambda,\Sigma}$	$R_{\sigma\Lambda,\Sigma}$	$R_{\omega\Lambda,\Sigma}$	$R_{\sigma\Xi}$	$R_{\omega\Xi}$
Bonn A	0.49	0.4935	0.6225	2/3	0.3618	1/3
Groningen	0.49	0.5217	0.6061	2/3	0.3343	1/3
DD phenom.	0.49	0.5100	0.6170	2/3	0.3421	1/3

**Tab. 7.2:** Skalierungsfaktoren der Hyperon–Meson–Vertizes für das  $\sigma$ - und das  $\omega$ -Meson. Die Vertizes hängen von der Gesamtbaryonendichte ab (Modell 1).

	$R_m$		$R_q$			
	$R_{\sigma\Lambda,\Sigma}$	$R_{\omega\Lambda,\Sigma}$	$R_{\sigma\Lambda,\Sigma}$	$R_{\omega\Lambda,\Sigma}$	$R_{\sigma\Xi}$	$R_{\omega\Xi}$
Bonn A	0.49	0.5690	0.5690	2/3	0.3040	1/3
Groningen	0.49	0.5387	0.5921	2/3	0.3222	1/3
DD phenom.	0.49	0.5251	0.6061	2/3	0.3287	1/3

**Tab. 7.3:** Skalierungsfaktoren der Hyperon–Meson–Vertizes für das  $\sigma$ - und das  $\omega$ -Meson. Die Vertizes hängen von der Dichte der Baryonen des jeweils zugehörigen  $SU(3)_f$  Multipletts ab (Modell 2).

Im DDRH–Modell berechnen sich die (nicht-relativistischen) Einteilchenpotentiale (Gl. (4.6)) als

$$U_Y^{(N)} = \Sigma_Y^{0(0)} + \Sigma_Y^{0(r)} - \Sigma_Y^{s(0)}. \quad (7.31)$$

Diese Relation setzt die in den Selbstenergien enthaltenen Kopplungen  $\Gamma_{\sigma Y}$  und  $\Gamma_{\omega Y}$  miteinander in Verbindung. So kann für einen festen phänomenologischen Wert  $U_Y^{(N)}$  und einen gegebenen vektoriellen Skalierungsfaktor  $R_{\omega Y}$  aus Gl. (7.30) der Wert des skalaren Mesons  $R_{\sigma Y}$  eindeutig bestimmt werden. Man findet aufgrund der unterschiedlichen Dichteabhängigkeit für Modell 1 und 2 verschiedene Skalierungsfaktoren  $R_{\omega Y}$ , obwohl beide an die gleiche Potentialtiefe angepasst werden. In Modell 1 werden die Hyperonen–Vertizes an der Sättigungsdichte  $\rho_T = \rho_0$  berechnet obwohl die Hyperonendichte  $\rho_Y \approx 0$  ( $\rho_Y \ll \rho_N$ ) ist, und die Nukleon tragen zum Rearrangementpotential  $\Sigma_Y^{0(r)}$  der Hyperonen bei. In Modell 2 hingegen müssen die Vertizes an der Dichte  $\rho_Y \approx 0$  berechnet werden und die Rearrangementselbstenergie verschwindet dementsprechend. Die Differenz zwischen den  $R_{\omega Y}$  der beiden Modelle kann auch als Maß für die Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung interpretiert werden, da für konstante Kopplungen die Skalierungsfaktoren identisch sein müssen.

Zur Untersuchung seltsamer Kernmaterie verwenden wir das Groningen und das Bonn A NN–Potential aus Teil II dieser Arbeit. Dabei werden nur die in unendlicher Kernmaterie an DB–Rechnungen angepassten dichteabhängigen Parametrisierungen berücksichtigt. Zum Vergleich untersuchen wir auch eine dichteabhängige phänomenologische Wechselwirkung, deren Parameter an endliche Kerne angepasst wurden [60]. Diese Wechselwirkung beschreibt endliche Kerne mit der gleichen Qualität wie RMF–Wechselwirkungen mit nichtlinearen  $\sigma$ -Termen. Wir werden sie als DD bezeichnen.

In Tabelle 7.2 und 7.3 zeigen wir die für die  $SU(6)$  Werte aus Gl. (7.28) bestimmten skalaren Skalierungsfaktoren  $R_{\sigma\Lambda}$ ,  $R_{\sigma\Sigma}$  und  $R_{\sigma\Xi}$ . Die Übereinstimmung von  $R_{\sigma\Xi}$  mit

dem SU(6)–Wert  $1/3$  ist in allen betrachteten Fällen sehr gut, während  $R_{\sigma\Lambda}$  und  $R_{\sigma\Sigma}$  von  $2/3$  auf ungefähr  $0.6$  reduziert werden. Diese Reduzierung ist in Modell 2 etwas stärker als in Modell 1 und der Unterschied zwischen beiden Modellen ist bei der Bonn A Parametrisierung am stärksten ausgeprägt. Diese aus den SU(6)–Werten des Quark–Modells bestimmten Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$  werden im folgenden als Skalierungssatz  $R_q$  bezeichnet.

Das gewöhnliche Vorgehen zur Bestimmung der YN–Wechselwirkung ist die gerade diskutierte Verwendung der SU(6)–Skalierungsfaktoren für die Vektormesonen. Da wir jedoch mikroskopische Wechselwirkungen aus DB–Rechnungen verwenden, die implizit hochgradig nichtlineare und nichtperturbative Korrelation einschließen, ist die strenge Verwendung obiger Quark–Modell–Reduktionsfaktoren möglicherweise ein zu einfacher Ansatz. Vielmehr sollten die  $R_{\alpha Y}$  direkt aus der Streumatrix bestimmt werden. Für das Bonn A Potential existiert eine Erweiterung auf freie N– $\Lambda$ –Systeme [115, 116], aber DB–Rechnungen wurden noch nicht durchgeführt. Aus der freien  $N\Lambda$  T–Matrix wurde allerdings für eine scharfe  $\sigma$ –Mesonenmasse  $m_\sigma = 550$  MeV ein Lambda–Vertex–Skalierungsfaktor  $R_{\sigma\Lambda} = 0.49$  extrahiert [116], der aufgrund von Gl. (7.24) direkt für die dichteabhängigen DB–Vertizes verwendet werden kann. Da sich aus diesen Rechnung keine theoretischen Werte für  $R_{\omega\Lambda}$  bestimmen lassen, wird dieser als phänomenologischer Parameter betrachtet und an die Potentialtiefe  $U_\Lambda^{(N)}$  angepasst. Für die  $\Sigma$ –Hyperonen kann man näherungsweise den gleichen Wert  $R_{\sigma\Sigma} = 0.49$  annehmen, für die  $\Xi$ –Hyperonen sind jedoch keine Informationen verfügbar, so dass weiterhin für  $R_{\alpha\Xi}$  die SU(6) Werte verwendet werden müssen. Ergebnisse sind in Tabelle 7.2 und 7.3 dargestellt. Wir werden diesen aus der mikroskopischen  $N\Lambda$  T–Matrix bestimmten Satz von Skalierungsfaktoren mit  $R_m$  bezeichnen.

In Modell 2 findet man für das Bonn A einen  $\omega$ –Skalierungsfaktor  $R_{\omega\Lambda} = 0.569$ , der in guter Übereinstimmung mit [44] ist. Dort wurde durch einen Fit an die Einzelteilchenenergien von  $\Lambda$ –Hyperkernen im gleichen Modell ein Wert von  $R_{\omega\Lambda} = 0.553$  bestimmt. In einem RMF–Modell mit konstanten Kopplungen wurde analog ein Wert  $R_{\omega\Lambda} = 0.512$  bestimmt [117]. Mit diesem Ansatz vergleichbar ist Modell 1, wo z.B. für die DD Parametrisierung mit  $R_{\omega\Lambda} = 0.510$  ein fast identischer Wert gefunden wird. Die Ursache für die teilweise recht deutlichen Abweichungen der  $R_{\sigma\Lambda}$  und  $R_{\omega\Lambda}$  von den Quark–Modell–Werten sind die gebrochene SU(3)<sub>f</sub>–Flavor–Symmetrie, die  $\omega$ – $\phi$  Oktett–Singlett–Mischung auf der fundamentalen Ebene der starken Wechselwirkung und nichtlineare Beiträge höherer Ordnung, die aus dem dynamisch erzeugten  $\sigma$  und  $\sigma_s$  Austauschkanal stammen [115, 116].

Eine Anpassung der Skalierungsfaktoren der Isovektormesonen  $\delta$  und  $\rho$  an phänomenologische Potentialtiefen ist leider nicht möglich, da keine experimentellen Ergebnisse für isovektorielle Hyperonen–Potentiale existieren. Für  $R_{\rho Y}$  und  $R_{\delta Y}$  werden deshalb immer die SU(6)–Werte des Quark–Modells aus Gl. (7.28) verwendet.

In [115, 116] wurde der Austauschkanal der skalaren Mesonen durch einen korrelierten Austausch von Pionen und Kaonen beschrieben. Deshalb enthält der skalare  $\sigma$ – $\Lambda$ –Vertex auch relevante Beimischungen des Feldes des  $\sigma_s$ –Strange–Mesons. Durch die Anpassung der vektoriellen Wechselwirkung werden entsprechend auch implizit Beiträge des  $\phi$ –Mesons berücksichtigt. Einfaches Abzählen im Quark–Modell zeigt, dass die Strange–Mesonen nur ungefähr 10% zur gesamten Wechselwirkungsstärke bei-

tragen. Aus diesem Grund werden die expliziten Beiträge der  $\sigma_s$ - und  $\phi$ -Mesonen in unseren Rechnungen vernachlässigt. Ein weiterer Grund ist, dass die Beiträge dieser Mesonen wegen fehlender experimenteller Daten nicht zuverlässig bestimmt werden können, was zu zusätzlichen Unbestimmtheiten in der YY-Wechselwirkung führt [114].

## 7.4 Eigenschaften von $\Lambda$ -Kernmaterie

Seltsame Kernmaterie, die aus einer beliebigen Zusammensetzung von Baryonen bestehen kann, lässt sich fast identisch wie asymmetrische Kernmaterie in Kapitel 3 beschreiben. In Hartree-Näherung ist die Dirac-Gleichung identisch zu Gl. (3.1), nur dass jetzt die freien Baryonenmassen und insbesondere die Rearrangementselbstenergien für alle Baryonen verschieden sein können (Modell 2):

$$\left[ \gamma_\mu (k_b - \Sigma_b^{\mu(0)} - \Sigma_b^{\mu(r)}) - (M_b - \Sigma_b^s) \right] u_b^*(k, s) = 0 \quad (7.32)$$

Die Selbstenergien sind die Erwartungswerte der in Gl. (7.10)-(7.12) definierten Größen (siehe auch Kapitel 2). Auch hier werden die Baryonen einzelnen und nicht mehr nach Multipletts gruppiert betrachtet. Energiedichte  $\epsilon$  und Druck  $P$  berechnen sich analog zu Gl. (3.16) und Gl. (3.18)

$$\epsilon = \sum_b \frac{1}{4} [3E_{F_b} \rho_b + m_b^* \rho_b^s] + \sum_b \frac{1}{2} [\rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)}] \quad (7.33)$$

$$P = \sum_b \frac{1}{4} [E_{F_b} \rho_b - m_b^* \rho_b^s] + \sum_b \frac{1}{2} [\rho_b \Sigma_b^{0(0)} - \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} + 2\rho_b \Sigma_b^{0(r)}], \quad (7.34)$$

jedoch läuft der Index  $b = p, n, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^0$  jetzt über alle Baryonen.  $E_{F_b}$  und  $m_b^*$  sind wie in Kapitel 3 definiert.

Bei der Bestimmung der Mesonenfelder muss im Gegensatz zu Gl. (3.5)-(3.8) über die verschiedenen Baryonen-Vertizes summiert werden:

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = \sum_b \Gamma_{\sigma b}(\tilde{\rho}) \rho_b^s, \quad m_\omega^2 A_0^{(\omega)} = \sum_b \Gamma_{\omega b}(\tilde{\rho}) \rho_b \quad (7.35)$$

$$m_\delta^2 \phi_\delta = \sum_b \Gamma_{\delta b}(\tilde{\rho}) \rho_b^s \tau_b, \quad m_\rho^2 A_0^{(\rho)} = \sum_b \Gamma_{\rho b}(\tilde{\rho}) \rho_b \tau_b \quad (7.36)$$

$$m_{\sigma_s}^2 \phi_{\sigma_s} = \sum_b \Gamma_{\sigma_s b}(\tilde{\rho}) \rho_b^s, \quad m_\phi^2 A_0^{(\phi)} = \sum_b \Gamma_{\phi b}(\tilde{\rho}) \rho_b \quad (7.37)$$

Die Baryonendichte  $\tilde{\rho}$  wird dabei entsprechend Modell 1 oder 2 gewählt.

Um den Einfluss der Dichteabhängigkeit und der unterschiedlichen Sätze von Skalierungsfaktoren  $R_m$  und  $R_q$  genauer zu untersuchen, beschränken wir uns zunächst nur auf Nukleonen und  $\Lambda$ -Hyperonen, da diese die einzigen Hyperonen mit mikroskopischen Ableitungen der Skalierungsfaktoren sind. Wir betrachten dazu symmetrische Kernmaterie ( $\rho_n = \rho_p = \frac{1}{2}\rho_N$ ), die eine feste Beimischung  $f_S$  von  $\Lambda$ -Hyperonen enthält. Der Strangeness-Anteil ist dabei für  $\Lambda$ -Materie definiert als

$$f_S = \frac{\rho_S}{\rho_T} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_N + \rho_\Lambda}. \quad (7.38)$$

Es handelt sich hierbei um ein hypothetisches instabiles System, da sich bei höheren Dichten auch die Zerfallskanäle

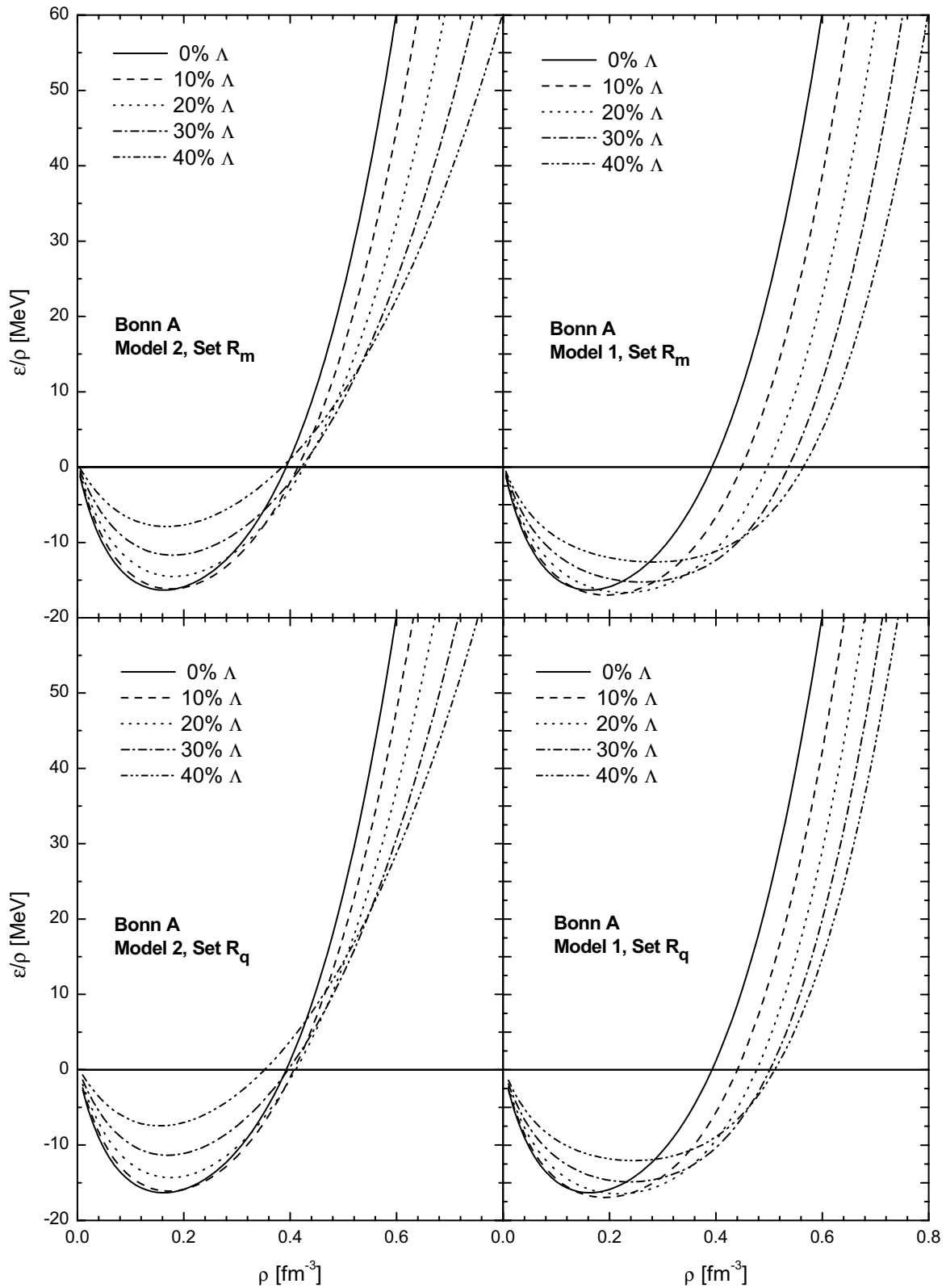
$$\Lambda + n \leftrightarrow \Sigma + n, \quad \Lambda + \Lambda \leftrightarrow \Xi + n, \quad \Lambda + \Xi \leftrightarrow \Sigma + \Xi, \quad \dots \quad (7.39)$$

öffnen und  $\Sigma$ - und  $\Xi$ -Hyperonen auftauchen. Stabile seltsame Materie muss deshalb neben der Strangeness-Erhaltung ( $f_S = \text{const.}$ ) auch noch das chemische Gleichgewicht garantieren. Wir werden dies in Kapitel 8 untersuchen. Die Beschränkung auf  $\Lambda$ -Beimischungen erlaubt jedoch eine anschaulichere Untersuchung der YN-Wechselwirkung.

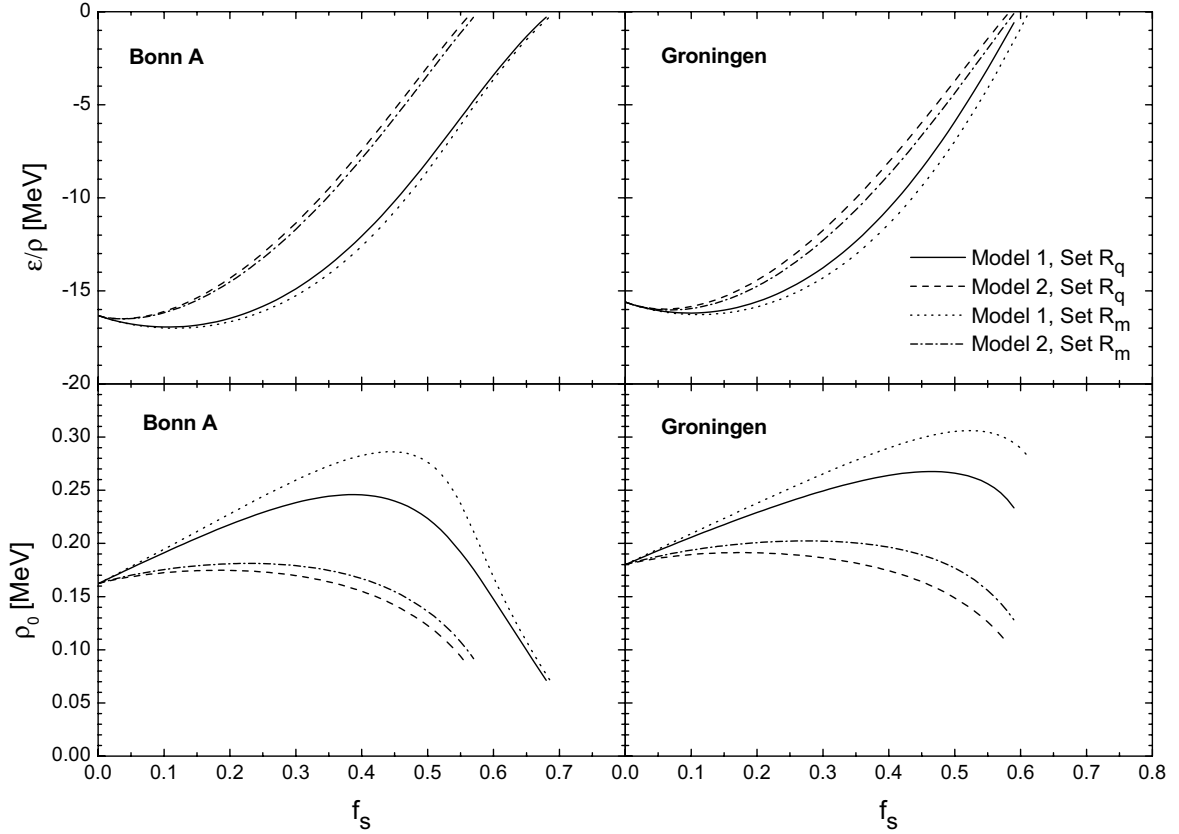
In Abbildung 7.2 wird die Zustandsgleichung für die Bonn A Parametrisierung für verschiedene Strangeness-Anteile gezeigt. Innerhalb des gleichen Dichtemodells ist die Zustandsgleichung, die mit den SU(6)-Werten  $R_q$  berechnet wurde, etwas steifer (stärker repulsiv) als diejenige, die mit den mikroskopischen Werten  $R_m$  bestimmt wurde. Für höhere Dichten und zunehmenden Strangeness-Anteil wächst der Unterschied zwischen beiden Zustandsgleichungen weiter. Die Erklärung für dieses Verhalten ist, dass im mikroskopischen Fall die reduzierte  $\Lambda$ -Kopplungsstärke auch die potentielle Energie der Hyperonen abschwächt. Die weichere Zustandsgleichung ist auch in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die bei den betrachteten Dichten wahrscheinlich stark attraktive Hyperon-Hyperon-Wechselwirkung [101], die durch die  $\sigma_s$ - und  $\phi$ -Mesonen hervorgerufen wird, in den Vertizes wenigstens teilweise implizit enthalten ist.

Das unterschiedliche Verhalten der beiden Zustandsgleichungen mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, da doch in beiden Fällen  $U_\Lambda^{(N)}$  an den gleichen Wert angepasst wurde. Aber diese Übereinstimmung ist nur an der Sättigungsdichte und für sehr kleine Strangeness-Anteile gegeben. Aufgrund der Dichteabhängigkeit der Vertizes verändert sich auch das Verhältnis von skalaren und vektoriellen Vertizes mit der Dichte und die Zustandsgleichungen unterscheiden sich umso stärker je weiter man sich vom Sättigungspunkt entfernt. Streng genommen können nur dann für verschiedene Skalierungsfaktoren identische Zustandsgleichungen gefunden werden, wenn skalares und vektorielles Potential proportional zu einander skalieren. Dies ist auch in den normalen RMF-Modellen nicht der Fall, da insbesondere wegen der nichtlinearen  $\sigma$ -Terme skalare und vektorielle Mesonenfelder nicht proportional zu einander sind. Der Effekt ist jedoch schwächer ausgeprägt als im DDRH-Modell mit seinen mediumabhängigen Kopplungen.

Mit zunehmenden Strangeness-Anteil verschiebt sich in Modell 1 das Minimum der Zustandsgleichung zu höheren Dichten. Die EoS ist auch stärker gebunden als in Modell 2, wo die Verschiebung des Minimums praktisch vernachlässigbar klein ist. Die Zustandsgleichung von Modell 1 ist insgesamt bei niedrigen Dichten wesentlich weicher als Modell 2, bei hohen Dichten nähern sich beide Modelle aber wieder einander an. Das Verhalten der EoS von Modell 2 stimmt besser mit nicht-relativistischen Brückner-Rechnungen überein, in denen entweder mit zunehmenden Strangeness-Anteil eine Verschiebung der Sättigungspunktes zu niedrigeren Dichten beobachtet wird [106] oder die Position des Minimums relativ unabhängig von  $f_S$  ist [105, 107]. Jedoch ist ein Vergleich mit nicht-relativistischen Ergebnissen schwierig, da diese die korrekte Sättigungsdichte von symmetrischer Kernmaterie nicht reproduzieren können [24]. Dieses Verhalten wird



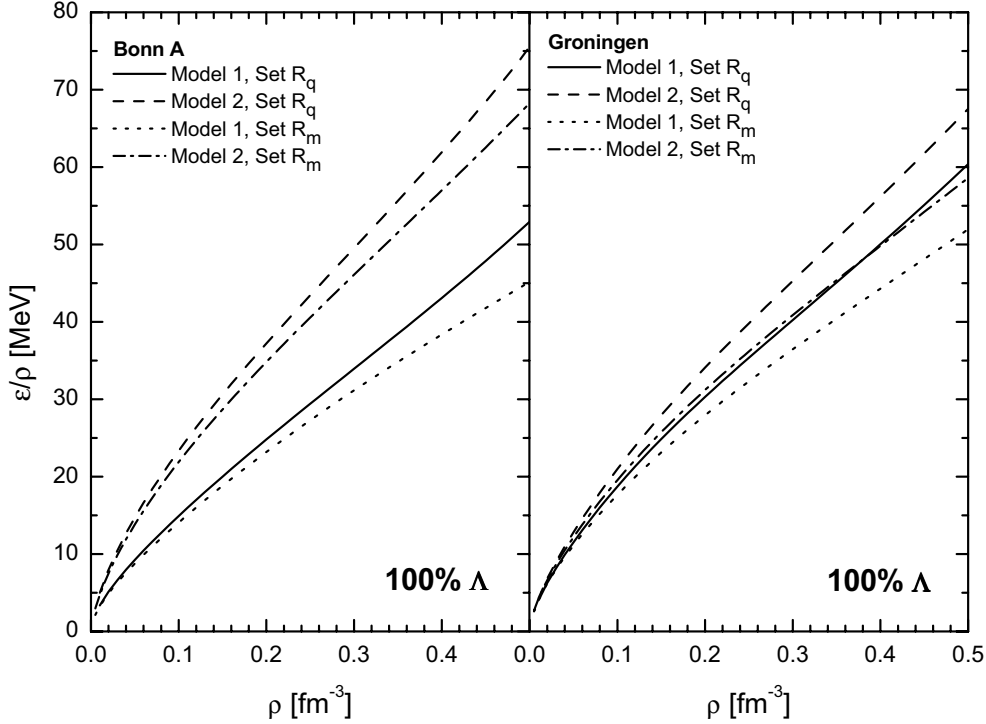
**Abb. 7.2:** Zustandsgleichung symmetrischer Kernmaterie für  $\Lambda$ -Beimischungen (Strangeness-Anteil  $f_S$ ) von 0% bis 40%. Gezeigt werden Ergebnisse für das Bonn A NN-Potential für verschiedene Wahlen der Dichteabhängigkeit (Model 1 und 2) und der Skalierungsfaktoren ( $R_q$  und  $R_m$ ).



**Abb. 7.3:** Bindungsenergie pro Baryon (oben) und Sättigungsdichte (unten) in Abhängigkeit vom Strangeness–Anteil  $f_s$  für verschiedene Wahlen des  $\Lambda$ -Meson–Vertex. Gezeigt werden Ergebnisse für das Bonn A (links) und das Groningen NN-Potential (rechts).

genauer in Abbildung 7.3 untersucht, in der die Sättigungsdichte und die Sättigungsenergie als Funktion des Strangeness–Anteils gezeigt werden. Der Unterschied zwischen Modell 1 und 2 ist bei der Groningen Parametrisierung schwächer ausgeprägt als beim Bonn A Parametersatz, was an ihrer schwächeren Dichteabhängigkeit bei niedrigen Dichten liegt [63]. Man erkennt, dass für sehr geringe Werte von  $f_s$  die Bindungsenergie zunimmt, was durch die reduzierte kinetische Energie der Nukleonen aufgrund des neuen  $\Lambda$  Freiheitsgrades erklärt werden kann. Bei höheren Dichten macht sich jedoch die schwächere Attraktion der Hyperon–Wechselwirkung – Ursache ist die reduzierten Kopplungsstärke – bemerkbar und die Bindungsenergie nimmt wieder ab.

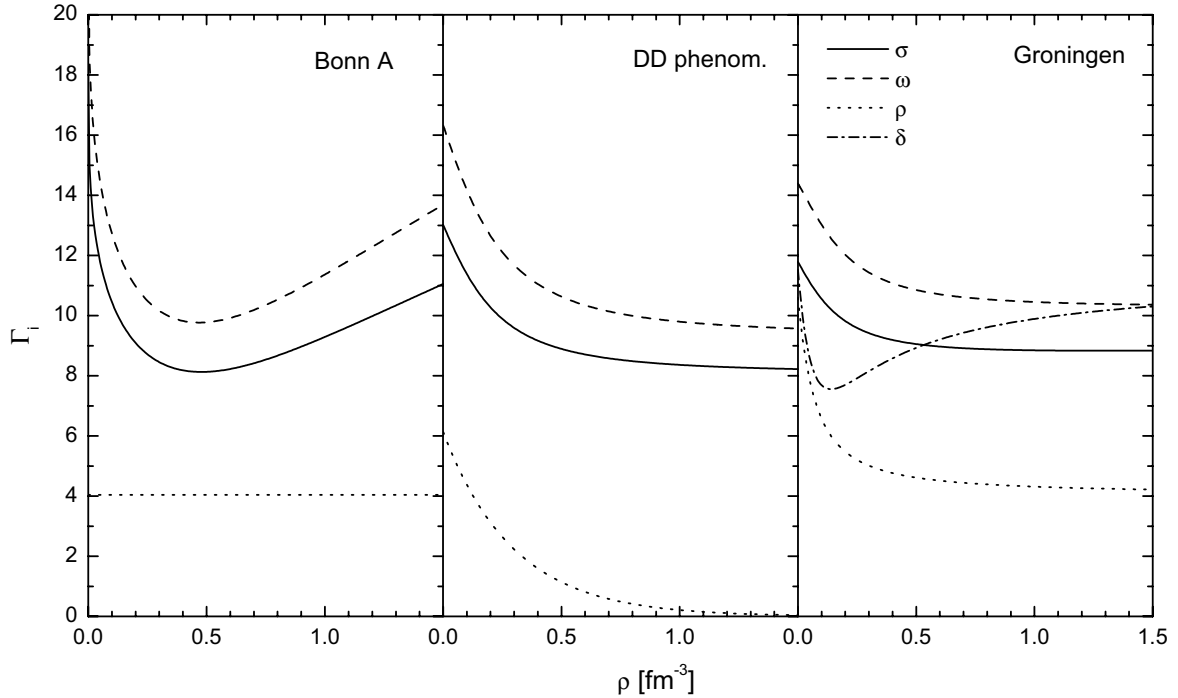
Der Unterschied zwischen Modell 1 und 2 ist immer größer als der Unterschied zwischen den beiden Wahlen der Skalierungsfaktoren  $R_q$  oder  $R_m$  in demselben Modell. Bei höherem Strangeness–Anteil scheinen sich jedoch die Zustandgleichungen beider Modelle einem gemeinsamen Wert anzunähern. Dieses Verhalten ist einleuchtend, da im Grenzfall reiner Multiplett–Systeme die Dichteabhängigkeit beider Modelle identisch ist. Dies wird genauer in Abbildung 7.4 untersucht, in der reine  $\Lambda$ –Materie mit der Bonn A und der Groningen Parametrisierung berechnet wurde. Die Bindungsenergien



**Abb. 7.4:** Bindungsenergie reiner  $\Lambda$ -Materie in Abhängigkeit von der Baryondichte für verschiedene Wahlen des  $\Lambda$ -Meson-Vertex. Gezeigt werden Ergebnisse für das Bonn A (links) und das Groningen NN-Potential (rechts).

von Modell 1 und 2 sind jedoch nicht identisch, da die Skalierungsfaktoren für  $f_S = 0$  angepasst wurden und wegen der unterschiedlichen Dichteabhängigkeit beider Modelle leicht verschiedene Werte besitzen. Dies wird durch einen Vergleich der Skalierungsfaktoren in Tabelle 7.2 und 7.3) deutlich. Auch in Abbildung 7.4 ist der Unterschied für die Bonn A Parametrisierung am stärksten ausgeprägt, während sich für die Groningen Parametrisierung deutlich die Annäherung beider Modelle erkennen lässt. Ergebnisse für die DD Parametrisierung werden hier nicht gezeigt, da ihre Dichteabhängigkeit stark dem Verhalten der Groningen Parametrisierung ähnelt.

Der aus der starken Dichteabhängigkeit der Bonn A Parametrisierung bei niedrigen Dichten resultierende Unterschied zwischen den verschiedenen Modellen ist möglicherweise nicht realistisch. Dies wird jedoch nicht durch das Bonn A NN-Potential verursacht, dass, wie wir in Kapitel 5 und 6 gesehen haben, eine sehr gute Beschreibung von endlichen Kernen und Kernmaterie am Sättigungspunkt erlaubt. Vielmehr führt die Parametrisierung der DB-Selbstenergien durch einen Polynomansatz (siehe Kapitel 3 und [36]) bei der Extrapolation zu sehr niedrigen und extrem hohen Dichten zu Unsicherheiten. In Modell 2 werden die Skalierungsfaktoren unter Verwendung der Vertizes bei sehr niedrigen Dichten ( $\Gamma_{\alpha\Lambda}(\rho_\Lambda \approx 0)$ ) an das Hyperonen-Potential angepasst und müssen dann zu hohen Dichten extrapoliert werden. Dies kann problematisch sein, da DB-Brückner für Dichten unterhalb  $0.5\rho_0$  aufgrund numerischer Probleme nur schwierig zuverlässig durchführbar sind. Die Extrapolation in Modell 2 hingegen ist sicher, da



**Abb. 7.5:** Verhalten der effektiven Vertizes bei hohen Dichten. Gezeigt werden Ergebnisse für die Bonn A ( $\sigma$  und  $\omega$  dichteabhängig), DD ( $\sigma$ ,  $\omega$  und  $\rho$ ) und Groningen ( $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  und  $\rho$ ) Parametrisierung.

dort die Vertizes und Skalierungsfaktoren an der Sättigungsdichte berechnet werden, an der sie wohldefiniert sind. Die Groningen und DD Parametrisierung vermeiden diese Unsicherheiten durch Parametrisierungen der Selbstenergien mit rationalen Funktionen (siehe Kapitel 3), die ein sehr stabiles Verhalten bei niedrigen und hohen Dichten aufweisen.

Das unterschiedliche Verhalten der drei Parametrisierungen wird noch einmal in Abbildung 7.5 gezeigt. Während der isoskalare Kanal für die Groningen und DD Parametrisierung sehr ähnlich ist, weist der isovektorielle Kanal einige Unterschiede auf. So wird die Iovektorwechselwirkung der DD Parametrisierung durch eine phänomenologische Dichteabhängigkeit beschrieben, die für hohe Dichten exponentiell abfällt. Die mikroskopische Iovektorwechselwirkung der Groningen Parametrisierung hingegen nähert sich im Grenzfall hoher Dichten einem von null verschiedenen, konstanten Wert an. Zusätzlich steigt die  $\delta$ -Kopplungsstärke oberhalb von  $\rho_0$  noch einmal relativ stark an, was auch schon in den DB-Rechnungen in Abbildung 3.2 beobachtet werden konnte. Der Einfluss dieses unterschiedlichen Verhaltens auf asymmetrische Systeme wird im nächsten Kapitel genauer untersucht.



# Kapitel 8

## Die Zustandsgleichung von Neutronensternen

Die Zustandsgleichung hadronischer Materie ist die fundamentale Größe zur Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen. Neutronensternmaterie unterscheidet sich in einigen wesentlichen Punkten von den bisherigen untersuchten Zustandsgleichungen und endlichen Kernen. Es handelt sich bei Neutronensternen um Systeme, in deren Innern extreme Bedingungen herrschen, die entscheidend von der schwachen Wechselwirkung mitbestimmt werden. Die Materie ist stark isospin-asymmetrisch und das Asymmetrieverhältnis  $a_s$  verändert sich in Abhängigkeit von der Dichte. In den bisher untersuchten Systemen war dagegen immer Isospin-Erhaltung gegeben. Das gleiche gilt auch für die in Neutronensternen erwarteten Hyperonen. Auch hier verändert sich der Strangeness-Anteil  $f_S$  in Abhängigkeit von der Dichte, Strangeness-Erhaltung ist also auch nicht gegeben. Die diesem Verhalten zugrunde liegende Bedingung des schwachen Gleichgewichts wird in diesem Kapitel genauer erläutert.

Die interne Struktur von Neutronensternen deckt einen sehr großen Dichtebereich ab, der etwa 14 Größenordnungen umfasst. An der Oberfläche des Sterns, welche aus  $^{56}\text{Fe}$  besteht, herrschen subnukleare Dichten von  $8 \text{ g/cm}^3$ , während man in seinem Zentrum Dichten  $> 3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$  findet, was einem Vielfachen der normalen Sättigungsdichte entspricht. Dort besteht der Stern hauptsächlich aus Neutronen, aber ab  $2 - 3\rho_0$  treten verstärkt Hyperonen auf. Wir beschränken uns hier auf den hadronischen Teil der Zustandsgleichung ab ca.  $0.3\rho_0$  und diskutieren den Niederdichtebereich im Kapitel 9 ausführlicher. Theoretische Überlegungen zeigen, dass im Zentrum von typischen Neutronensternen mit 1.4 Sonnenmassen Dichten von etwa  $2 - 3\rho_0$  herrschen, während die maximal erreichbaren Dichten in schwereren Sternen  $5 - 10\rho_0$  betragen können. Zur Berechnung von Neutronensternen ist also die Kenntnis der Zustandsgleichung über einen sehr breiten Dichtebereich notwendig. Dies ist eine theoretische Herausforderung, da gesicherte Kenntnisse für die EoS nur am Sättigungspunkt  $\rho_0$  von Kernmaterie existieren. Die Extrapolation der Zustandsgleichung und der in-Medium Wechselwirkung zu hohen Dichten ist deshalb von entscheidender Bedeutung. Auch die Eigenschaften der Isektorwechselwirkung werden sehr wichtig, da in Neutronensternen Asymmetrieverhältnisse  $a_s \ll 0.1$  herrschen. Dagegen wird selbst in exotischen Kernen in der Nähe der Neutronenabbruchkante nur ein Wert  $a_s \approx 0.3$  erreicht.

Die Eigenschaften von Neutronensternen und seltsamer Kernmaterie im schwachen Gleichgewicht sind in verschiedenen Modellen studiert worden. Nichtrelativistische Ansätze sind auf einem Dichtefunktional aufbauende phänomenologische Potentialmodelle [118] und insbesondere Brückner–Rechnungen, die nicht-relativistische realistische NN-, YN- und YY-Potentiale als Ausgangspunkt verwenden [119, 120]. Der Brückner–Ansatz ist aus mikroskopischer Sicht sehr befriedigend. Aufgrund der im Innern von Neutronensternen herrschenden extremen Dichten – der Fermiimpuls und die effektive Masse liegen in der Größenordnung von 500 MeV – sollte man jedoch eine relativistische Beschreibung vorziehen. DB–Rechnungen sind jedoch, wie bereits in Kapitel 7 erwähnt, gegenwärtig für seltsame Kernmaterie noch nicht durchführbar, weshalb in der Literatur bis jetzt nur Rechnungen für asymmetrische Nukleonenmaterie im schwachen Gleichgewicht durchgeführt wurden [47, 62, 121]. Es existieren auch Ansätze, die diese DB–Ergebnisse im relativistischen Hartree–Fock–Modell parametrisieren und zu hohen Dichten extrapolieren [122, 123].

Relativistische Ansätze, die auch eine Behandlung von Hyperonen ermöglichen, sind die relativistische Hartree–Theorie (RMF) [90, 91, 93, 94, 95], chirale effektive Lagrangedichten [124] und das Quark–Meson–Coupling–Modell [125]. Das RMF–Modell wurde bereits ausführlich diskutiert. Da dort phänomenologische Wechselwirkungen verwendet werden, die nur an endliche Kerne bzw. die Sättigungsdichte  $\rho_0$  angepasst wurden, ist die Extrapolation zu hohen Dichten mit Unsicherheiten behaftet. Insbesondere der nichtlineare  $\sigma^4$ -Term besitzt in einigen Parametrisierungen ein negatives Vorzeichen, was zu Instabilitäten bei hohen Dichten [19] und negativen effektiven Massen [95] führen kann. Parametrisierungen mit  $\omega^4$ -Selbstwechselwirkungen [15, 86] umgehen diese Probleme und erlauben eine erfolgreiche Beschreibung von Neutronensternmaterie.

Die auf Hyperonen erweiterte DDRH–Theorie aus Kapitel 7 erlaubt es uns nun, die Vorteile des RMF–Modells mit einer mikroskopischen Wechselwirkung zu kombinieren. Da die dichteabhängige Parametrisierung in Kapitel 3 an den Dichtebereich von  $0.5 - 3\rho_0$  angepasst wurde, erwarten wir, dass die Extrapolation zu hohen Dichten genauer bestimmt ist als in RMF–Modellen. Dieser Ansatz kommt im Vergleich mit den anderen diskutierten Modellen einer kompletten DB–Rechnung für Neutronensternmaterie am nächsten und wurde bis jetzt in dieser Weise in der Literatur noch nicht untersucht.

## 8.1 Die Gleichgewichtsbedingungen für Neutronensternmaterie

Wir diskutieren zuerst die Gleichgewichtsbedingungen im Innern von Neutronensternen. Wegen der im Vergleich zur Lebensdauer von Neutronensternen kleinen Zeitskala der schwachen Wechselwirkung ist die Strangeness in Neutronensternmaterie keine Erhaltungsgröße mehr. Vielmehr unterliegt Neutronensternmaterie den Nebenbedingungen der Ladungsneutralität und des schwachen  $\beta$ -Gleichgewichts. Der Zustand minimaler Energie ist demzufolge durch das Auftreten von Hyperonen charakterisiert.

Aufgrund des schwachen Zerfallskanals müssen in der Lagrangedichte von Neutronensternmaterie zusätzlich die Elektronen  $e^-$  und die Myons  $\mu^-$  berücksichtigt werden,

was eine Erweiterung von Gl. (7.4) um die leptonischen Terme

$$\Psi_L = (\psi_e, \psi_\mu)^T, \quad \mathcal{L}_L = \bar{\Psi}_L [i\gamma_\mu \partial^\mu - \hat{M}_L] \Psi_L. \quad (8.1)$$

notwendig macht. Energiedichte und Druck der der nicht starkwechselwirkenden Leptonen sind gegeben durch

$$\epsilon = \sum_{l=e,\mu} \frac{1}{4} [3E_{F_l} \rho_l + m_l \rho_l^s], \quad P = \sum_{l=e,\mu} \frac{1}{4} [E_{F_l} \rho_l - m_l \rho_l^s], \quad (8.2)$$

wobei die Fermienergien  $E_{F_l}$  und die Dichten  $\rho_l$  und  $\rho_l^s$  alleine durch leptonische Beiträge bestimmt sind.

Die Bedingung der Ladungsneutralität im Innern eines Neutronenterns wird durch die Nebenbedingung

$$\rho_c = \sum_i q_i \rho_i = 0. \quad (8.3)$$

gewährleistet, wobei die Summe über den Index  $i = b, l$  über alle Baryonen und Leptonen läuft. Die Ladung der entsprechenden Teilchen wird durch  $q_i$  beschrieben. Zusätzlich muss natürlich auch die Gesamtbaryonenzahl des Systems erhalten sein, was sich durch die Bedingung

$$\rho = \sum_i b_i \rho_i \quad (8.4)$$

erreichen lässt. Dabei ist  $b_i$  die Baryonenzahl ( $b_i = 1$  für Baryonen,  $b_i = 0$  für Leptonen). Im schwachen  $\beta$ -Gleichgewicht sind alle Zerfallsprozesse erlaubt, die die Ladungs- und die Baryonenzahl erhalten, z.B.

$$n \rightarrow p + e^-, \quad n + n \rightarrow \Lambda + n, \quad \Lambda + \Lambda \rightarrow \Xi^- + p, \quad \dots \quad (8.5)$$

Die dadurch entstehenden neuen Baryonen können aufgrund des Pauli-Prinzips nicht wieder in Neutronen zerfallen. So erhöhen etwa die  $\Lambda$ -Hyperonen die Strangeness des Sterns und im Gleichgewicht gilt  $\mu_n = \mu_\Lambda$ . Mit zunehmender Gesamtdichte bzw. Energie der Baryonen könne weitere Hyperonen auftauchen. Dies lässt sich durch die folgende Gleichgewichtsbedingung für die chemischen Potentiale ausdrücken

$$\mu_i = b_i \mu_N - q_i \mu_e. \quad (8.6)$$

Dabei bezeichnet  $\mu_N$  das chemische Potential der ungeladenen Baryonen ( $\mu_N = \mu_n = \mu_\Lambda = \dots$ ) und  $\mu_e$  das chemische Potential der Leptonen ( $\mu_e = \mu_\mu$ ). Ein Baryon bzw. Lepton vom Typ  $i$  tritt also auf, wenn  $\mu_i$  den niedrigsten Eigenzustand im Medium übersteigt. Für die Leptonen  $l$  ist dies ihre Masse, da sie der freien Energie-Impuls-Relation folgen

$$\mu_l = \sqrt{k_{F_l}^2 + m_l^2} = E_{F_l}. \quad (8.7)$$

Das chemische Potential der Baryonen  $b$  wird zusätzlich noch von der Nukleonen- und Hyperonen-Wechselwirkung beeinflusst und wurde bereits in Kapitel 3 berechnet

$$\mu_b = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_b} = \sqrt{k_{F_b}^2 + m_b^{*2}} + \Sigma_b^{0(0)} + \Sigma_b^{0(r)}. \quad (8.8)$$

Mit diesen Beziehungen ist es nun möglich, die Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie zu berechnen. Dazu müssen simultan die Mesonenfeldgleichungen Gl. (7.35)-(7.37) gelöst werden und die Nebenbedingungen der Ladungs- und Baryonenerhaltung (Gl. (8.3) und Gl. (8.4)) sowie des chemischen Gleichgewichts (Gl. (8.6)) erfüllt werden. Es ist also ein nichtlineares Gleichungssystem mit  $6 + 2 + n$  Unbekannten (6 Mesonenfelder, 2 Leptonendichten,  $n$  Baryondichten) zu lösen. Für das komplette Baryonenoktett ergibt sich ein Gleichungssystem mit 16 Unbekannten.

In RMF-Modellen mit konstanten Kopplungen kann die Lösung dieses Gleichungssystems auf die Bestimmung der chemischen Potentiale  $\mu_N$  und  $\mu_e$  und der Mesonenfelder reduziert werden. Man erhält nur zwei zusätzliche Randbedingungen zu den Gleichungen für normale Kernmaterie, was die Rechnungen sehr vereinfacht. Für konstante Kopplungen und verschwindende Rearrangementenergien lässt sich nämlich Gl. (8.8) analytisch nach dem Fermiimpuls  $k_F$  auflösen und damit die Dichte  $\rho_b = k_{F_b}^3/3\pi^2$  jedes Baryons für ein gegebenes Potential aus Gl. (8.6) bestimmen.

In der DDRH-Theorie ist die Lösung jedoch wesentlich aufwendiger. Dies liegt hauptsächlich an den aufgrund der dichteabhängigen Vertizes auftretenden Rearrangementselfstenergien in der Relation für das chemische Potential. In Modell 1 hängt die Kopplungsstärke von der Gesamtdichte ab. Sie ist deshalb für eine gegebene Dichte bekannt und unabhängig von der Baryonenzusammensetzung der Zustandsgleichung. Die Rearrangementselfstenergien in Gl. (8.8) können jedoch erst berechnet werden, wenn *alle* Baryondichten bekannt sind. In Modell 2 ist die Situation noch komplexer, da hier zusätzlich die Stärke der Wechselwirkung von der Zusammensetzung der Zustandsgleichung abhängt. Ausserdem sind die Rearrangementselfstenergien für jedes Baryonen-Multiplett verschieden und sehr stark abhängig von der Dichte der einzelnen Baryontypen und der Dichteabhängigkeit der Vertizes. Es ist deshalb notwendig, alle Dichten simultan zu bestimmen. Dabei muss insbesondere darauf geachtet werden, ob die Existenz eines Baryons energetisch erlaubt ist, um das chemische Gleichgewicht nicht zu verletzen.

Die Lösung des obigen nichtlinearen Gleichungssystems ist numerisch sehr aufwendig. Aufgrund der starken Abhängigkeit der Vertizes von der Dichte ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn neue Hyperonen auftreten. So tauchen z.B.  $\Lambda$ - und  $\Sigma^-$ -Hyperonen bei typischen Dichten von  $2-3\rho_0$  auf. Ihr Anteil an der Gesamtdichte beträgt anfangs nur etwa  $10^{-4}$ , was einem extrem asymmetrischen System mit  $\rho_N/\rho_Y \approx 10000$  entspricht. Dieses Verhältnis nimmt mit zunehmender Dichte stark ab, jedoch ist der Punkt, an dem die Hyperonen auftreten, besonders kritisch. Die praktische Lösung des Gleichungssystems erfolgt schrittweise. Wir lösen Gl. (7.35)-(7.37) und (Gl. (8.6)) simultan und überprüfen dabei die Nebenbedingungen (Gl. (8.3) und Gl. (8.4)). Im ersten Schritt werden die Rearrangementselfstenergien vernachlässigt, was eine Lösung des Problems ähnlich dem RMF-Modell erlaubt. Unter Verwendung dieser Lösung als Startwert wird dann das volle Problem gelöst.

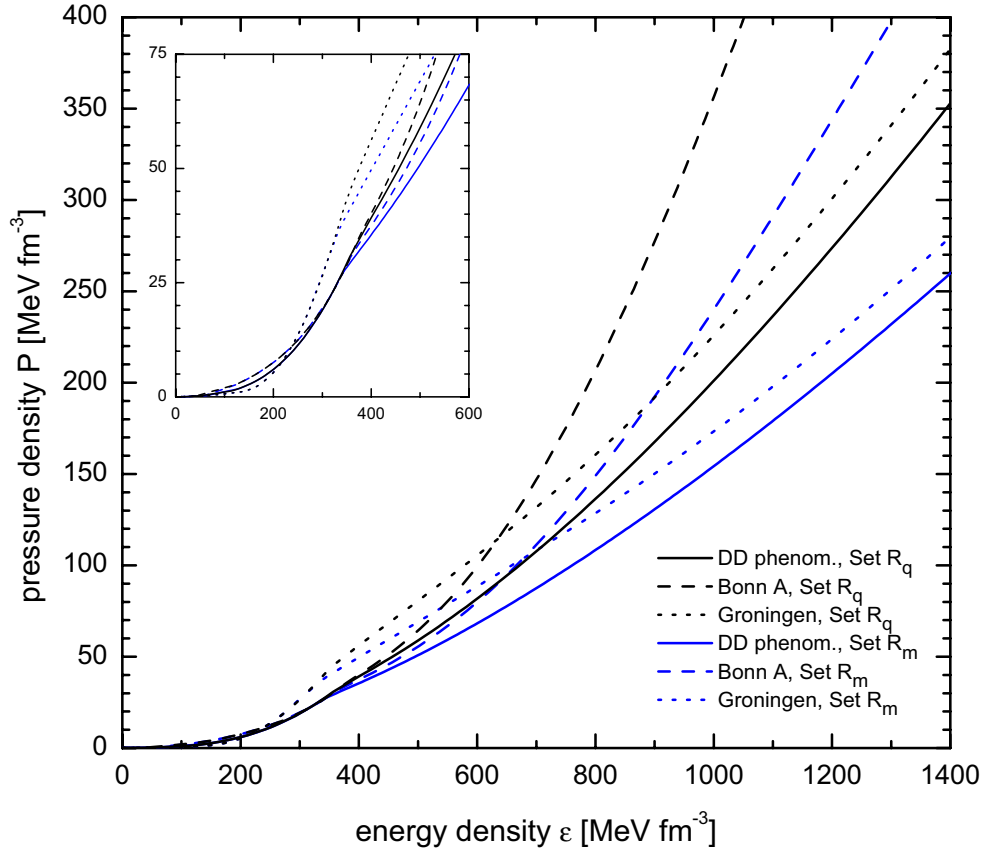
## 8.2 Abhängigkeit der Vertizes von der Gesamtdichte

Als erstes untersuchen wir die Eigenschaften von Zustandsgleichungen, die in Modell 1 berechnet wurden, d.h. wir nehmen eine Abhängigkeit der Meson-Baryon-Vertizes von der Gesamtdichte an. Wir beschränken uns auch hier zuerst auf  $\Lambda$ -Hyperonen, was einen Vergleich zu den Untersuchungen für  $\Lambda$ -Kernmaterie aus Kapitel 7 erlaubt. Für Neutronensternmaterie ist anders als in Kapitel 3 und 7 jedoch eine Druck-Dichte-Zustandsgleichung, die den Druck als Funktion der Energiedichte für eine gegebene Baryondichte beschreibt, die geeignete Größe. Die Untersuchung dieser Funktion ist anschaulicher, da  $p(\epsilon)$  genau die Eingangsgröße zur Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen ist. Das Verhalten von  $p(\epsilon)$  und das von  $\epsilon(\rho)$  sind jedoch stark miteinander korreliert, da  $\epsilon$  mit steigenden  $\rho$  streng monoton anwächst. Die Energiedichte am Sättigungspunkt beträgt dabei für alle hadronischen Zustandsgleichungen  $\epsilon(\rho_0) \approx 140$  MeV fm<sup>-3</sup> und wächst in guter Näherung linear an. Eine Zustandsgleichung wird normalerweise im Vergleich zu anderen als „weicher“ bezeichnet, wenn ihre Energie bei gleicher Baryondichte geringer ist. Wir benutzen diesen Ausdruck jetzt, wenn der Druck bei gleicher Energiedichte geringer ist. Dies ist im Prinzip äquivalent, da eine geringere Energiedichte auch einen geringeren Druck zur Folge hat (siehe z.B. Gl. (7.33) und Gl. (7.34)).

Eine Zustandsgleichung im schwachen Gleichgewicht ist immer weicher als eine mit fest vorgegebenen Dichten und damit der energetisch bevorzugte Zustand. Man kann sich dies leicht durch den Vergleich mit reiner Neutronenmaterie veranschaulichen. Wenn dort ein Neutron in ein Elektron und ein Proton zerfällt, reduziert dies insgesamt kinetische Energie und Druck des Systems, da neue Freiheitsgrade auftreten und aufgrund des Pauli-Prinzips Proton und Elektron niedrigere Energiezustände als das ursprüngliche Neutron besetzen können.

In Abbildung 8.1 wird die Zustandsgleichung für die drei dichteabhängigen Parametrisierungen Groningen, Bonn A und DD und die beiden Skalierungssätze  $R_q$  und  $R_m$  untersucht. Die phänomenologische DD Parametrisierung besitzt die weichste EoS, knapp gefolgt von der Groningen Parametrisierung, während die Bonn A Parametrisierung insbesondere bei hohen Dichten viel repulsiver ist. Zustandsgleichungen mit den SU(6)-Skalierungsfaktoren  $R_q$  (obere Linien) sind wesentlich steifer als solche, die die mikroskopischen Werte  $R_m$  (untere Linien) verwenden. Dies wurde auch schon in Abbildung 7.2 und 7.3 beobachtet, jedoch fällt der Unterschied hier größer als erwartet aus. Dies liegt hauptsächlich an der reduzierten Abstoßung des Vektorpotentials für den Skalierungssatz  $R_m$ . Dadurch erscheinen die  $\Lambda$ -Hyperonen bereits bei etwas geringeren (Energie-)Dichten, was durch die Reduzierung des kinetischen Drucks den Gesamtdruck  $P$  zusätzlich verringert.

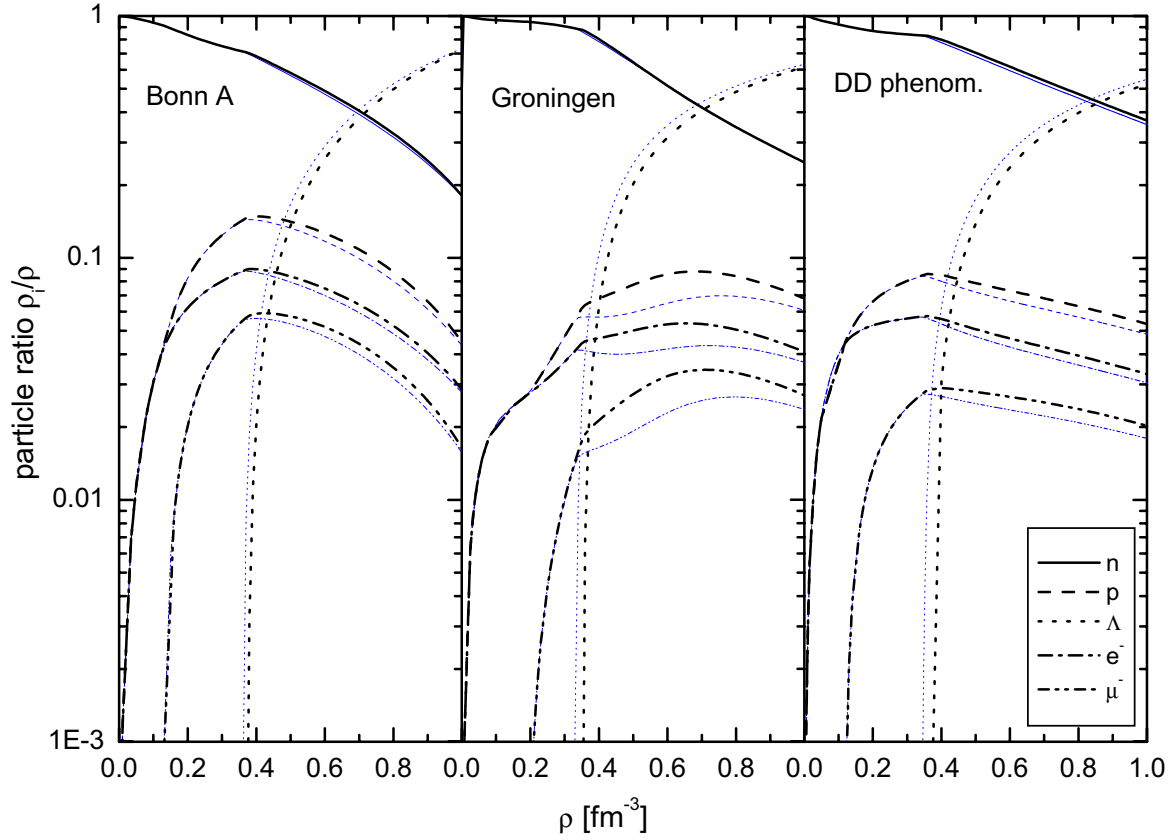
Es ist bemerkenswert, dass die Unterschiede zwischen den beiden Wahlen der Skalierungsfaktoren größer sein können, als die Unterschiede zwischen zwei verschiedenen Wechselwirkungen. Dies weist darauf hin, dass eine genauere Untersuchung des Einflusses der Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha\Lambda}$  notwendig ist. Die Eigenschaften der Wechselwirkungen bei sehr hohen Dichten werden hauptsächlich durch die Dichteabhängigkeit der



**Abb. 8.1:** Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie (Druck als Funktion der Energiedichte) im DDRH-Modell für verschiedene dichteabhängigen Wechselwirkungen in Modell 1. Die obere Linie einer jeden Wechselwirkung entspricht jeweils Rechnungen mit dem Skalierungssatz  $R_q$ , die untere Rechnungen mit dem Satz  $R_m$ . Es wurde nur das  $\Lambda$  berücksichtigt.

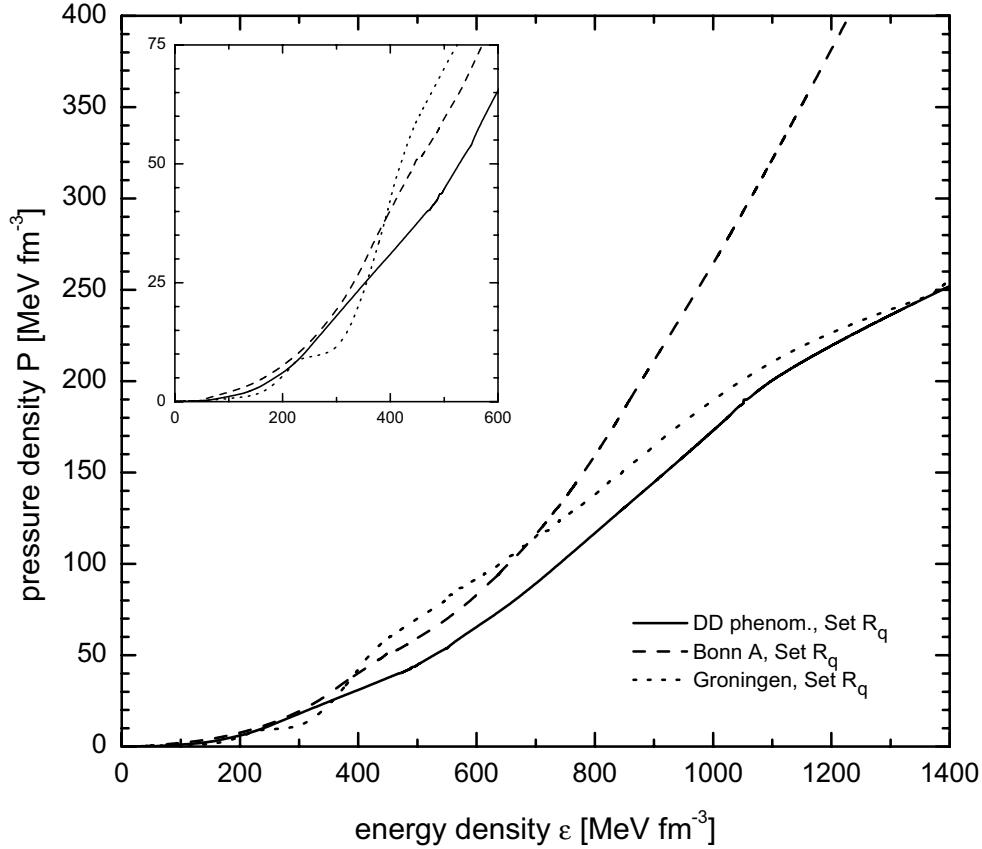
Vertizes bestimmt. Die DD und Groningen Parametrisierung zeigen hier ein mit relativistischen und nicht-relativistischen Brückner-Rechnungen vergleichbares Verhalten mit einer relativ weichen EoS, was an dem Fit mit dem stabilisierten rationalen Polynom liegt. Im Gegensatz dazu steigen die Kopplungen der Bonn A Parametrisierung bei Dichten  $> 3\rho_0 \approx 0.5 \text{ fm}^{-3}$  wieder an (siehe Abbildung 7.5). Dies führt dazu, dass der Beitrag des  $\omega$ -Mesons denjenigen des  $\sigma$ -Mesons bei sehr hohen Dichten übersteigt. Dies erklärt auch, warum dort die EoS sehr steif wird. Die Ursache ist nicht direkt das Bonn A NN-Potential sondern die Wahl eines Polynoms zur Parametrisierung der Selbstenergien.

Wie man jedoch in dem vergrößerten Ausschnitt in Abbildung 8.1 erkennen kann, ist bei niedrigen Energiedichten, für die DB-Ergebnisse vorliegen, der Verlauf aller Zustandsgleichungen sehr ähnlich. Hyperonen tauchen bei Energiedichten von  $300 - 350 \text{ MeV fm}^{-3}$  auf, was zu einem leichten Knick in der EoS führt. Dies entspricht je nach Wechselwirkung Dichten von  $0.35 - 0.4 \text{ fm}^{-3}$ , also etwa  $2.5\rho_0$ , und ist in sehr guter Übereinstimmung mit RMF-Modellen [95]. Baryonen- und Leptonen-Verteilungen für



**Abb. 8.2:** Vergleich der Zusammensetzung von Neutronensternmaterie im DDRH-Modell im schwachen Gleichgewicht für die Skalierungssätze  $R_m$  (dünne Linien) und  $R_q$  (dicke Linien). Gezeigt werden Rechnungen für die verschiedenen dichteabhängigen Wechselwirkungen. Es wurde nur das  $\Lambda$  berücksichtigt.

die diskutierten Zustandsgleichungen werden in Abbildung 8.2 gezeigt. Für alle Wechselwirkungen beträgt der Anteil der Protonen maximal 10%, während sich mit dem Auftreten der Myonen der Anteil der Elektronen reduziert und maximal 8% (bei 2% Myonen) erreicht. Mit dem Auftreten der  $\Lambda$ -Hyperonen nimmt der Anteil aller anderen Teilchen sehr stark ab und oberhalb von etwa  $4.5\rho_0$  besteht der Stern mehrheitlich aus Hyperonen. Bei der Groningen Parametrisierung tauchen die Myonen erst für Dichten  $> 0.2 \text{ fm}^{-3}$ , da die Energie unterhalb dieser Dichte zu gering ist, um ein chemisches Potential  $\mu_\mu > m_\mu$  zu erlauben. Man erkennt dies deutlich in Abbildung 8.1, wo die Groningen EoS unterhalb  $\epsilon = 200 \text{ MeV fm}^{-3}$  am weichsten ist. Ursache für dieses Verhalten ist die in diesem Dichtebereich wieder ansteigende  $\delta$ -Meson-Kopplungsstärke (siehe Abbildung 7.5). Das  $\delta$ -Feld wirkt attraktiv für Neutronen und reduziert so die Bindungsenergie des stark asymmetrischen Systems. Die Zusammensetzung von Neutronensternmaterie ist fast unabhängig von der Wahl der Skalierungsfaktoren. Für den mikroskopischen Skalierungssatz  $R_m$  erscheinen die Hyperonen etwas früher mit einem höheren Anteil, was zu der schon diskutierten weicheren EoS führt.



**Abb. 8.3:** Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie im DDRH-Modell unter Berücksichtigung aller Hyperonen (Skalierungsfaktoren  $R_q$  aus SU(6) Symmetrie) in Modell 1. Gezeigt werden Rechnungen für die verschiedenen dichteabhängigen Wechselwirkungen.

Zum Vergleich von Modell 1 mit RMF-Modellen mit konstanten Kopplungen wurden auch Rechnungen für das komplette Baryonenoktett durchgeführt. Da keine mikroskopischen Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha\Xi}$  erhältlich sind, wurden nur die aus der SU(6)-Symmetrie abgeleiteten  $R_{\alpha Y}$  (Skalierungssatz  $R_q$ , siehe Tabelle 7.2) verwendet. Ergebnisse für die Zustandsgleichungen werden in Abbildung 8.3 gezeigt. Auch hier sind die DD und Groningen Parametrisierung wesentlich weicher als die Bonn A Parametrisierung. Jedoch unterscheiden sich die Wechselwirkungen bei niedrigen und mittleren Dichten beträchtlich. Die Groningen Parametrisierung zeigt eine extreme Abschwächung des Druckes im Bereich um  $\epsilon = 300 \text{ MeV fm}^{-3}$ , die fast die mikroskopische Stabilitätsbedingung  $\partial p / \partial \epsilon \geq 0$  verletzt. Diese Abschwächung wird durch das frühe Erscheinen des  $\Sigma^-$ -Hyperons verursacht. Die starke Kopplung des  $\Sigma^-$  an das  $\delta$ -Feld, welches nur in der Groningen Parametrisierung vorhanden ist, reduziert die effektive Masse  $m_{\Sigma^-}^* = M_{\Sigma^-} - \Gamma_{\sigma\Sigma^-} \Phi_\sigma - 2\Gamma_{\delta\Sigma^-} \Phi_\delta$ . Im Gegensatz dazu koppelt das isoskalare  $\Lambda$  nicht an das isovektorielle  $\delta$ -Meson und erscheint deshalb erst bei deutlich höheren Dichten als das  $\Sigma^-$ . Zusätzlich erhöht die Kopplung an das  $\delta$ -Meson die effektiven Massen der  $\Sigma^+$ - und  $\Xi^0$ -Hyperonen und verschiebt die Schwelle für ihr Auftreten zu



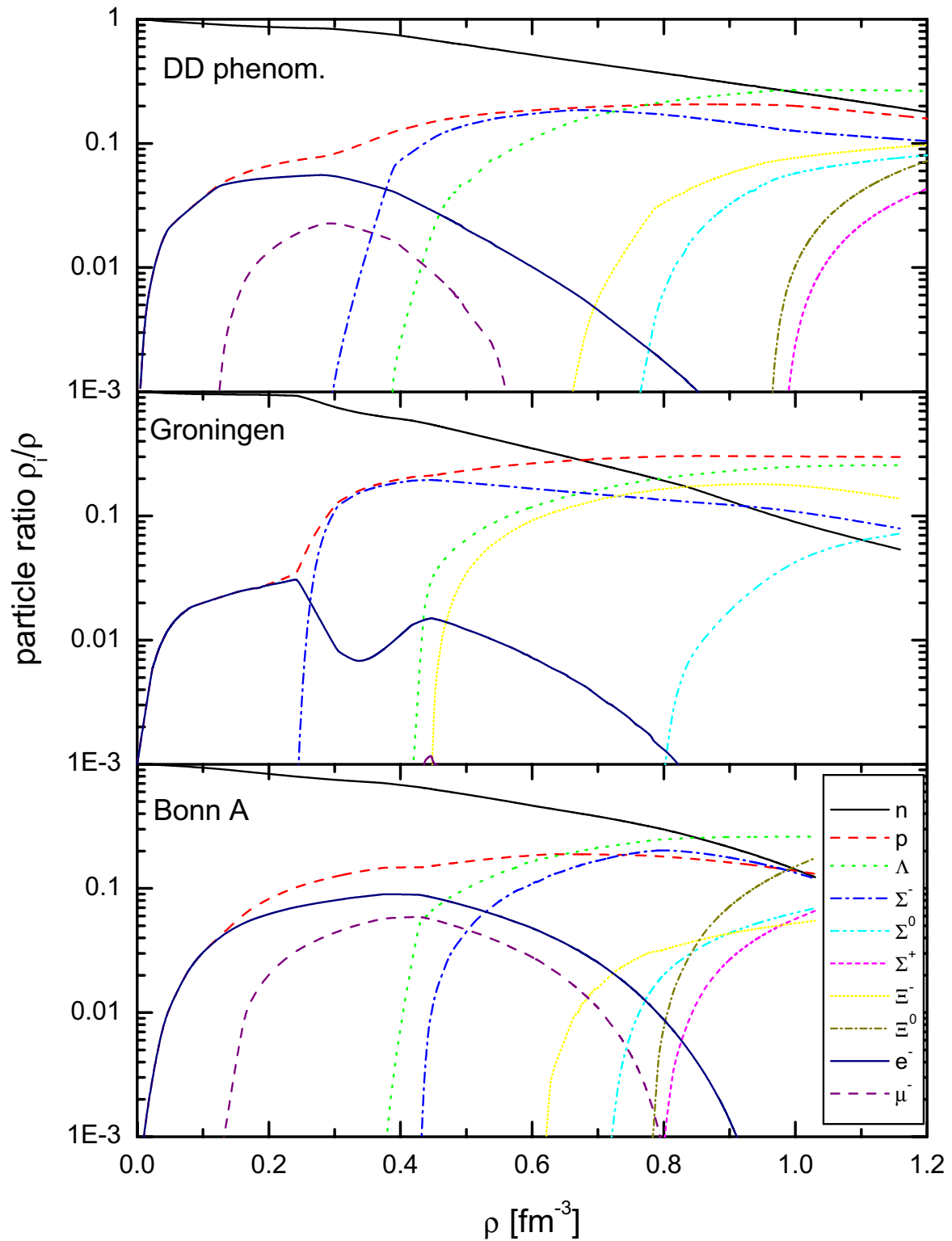


Abb. 8.4: Zusammensetzung von Neutronensternmaterie im DDRH-Modell in Modell 1 unter Berücksichtigung aller Hyperonen (Skalierungsfaktoren  $R_q$  aus SU(6) Symmetrie). Gezeigt werden Rechnungen für die verschiedenen dichteteabhängigen Wechselwirkungen.

höheren Dichten. Diese Ergebnisse unterscheiden sich von [95], wo die Verwendung einer konstanten  $\delta$ -Kopplung die Zustandsgleichung nicht erkennbar beeinflusste.

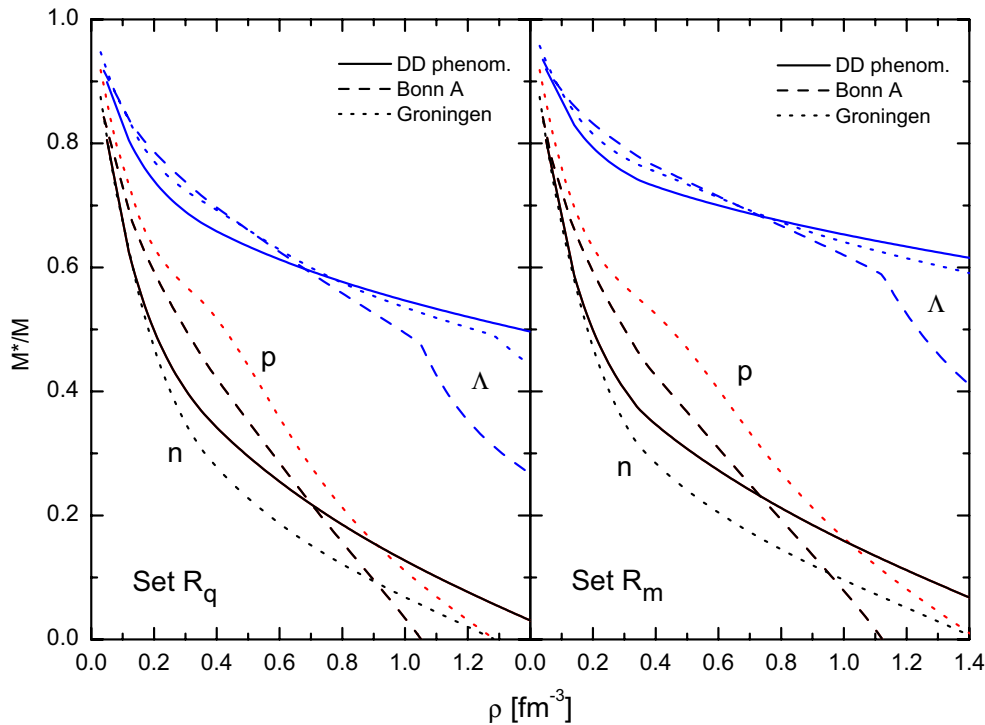
Ergebnisse für die Zusammensetzung von Neutronensternmaterie werden in Abbildung 8.4 für die verschiedenen Wechselwirkungen gezeigt. Man erkennt deutlich den frühen und sehr starken Anstieg des  $\Sigma^-$ -Anteils für das Groningen Potential, der zeitweilig sogar den Anteil der Elektronen reduziert und die Myonen fast komplett unterdrückt. Dies widerspricht Ergebnissen aus RMF- und nicht-relativistischen Brückner-Rechnungen, z.B. [95, 120], und bedarf einer genaueren Diskussion. Die Extraktion der isovektoriellen Dichteabhängigkeit der Vertizes aus den DB-Selbstenergien führt zu relativ großen Kopplungsstärken (Abbildungen 7.5 und 3.3). Der zusätzliche Anstieg der  $\delta$ -Kopplungsstärke bei Dichten oberhalb der Sättigungsdichte könnte die Änderung der Baryonenzusammensetzung erklären. Die Isektorwechselwirkung könnte durch einen Fit des Skalierungsfaktors  $R_{\delta\Sigma^-}$  an die Stärke des  $\Sigma$ -Isektorpotentials angepasst werden. Aufgrund fehlender experimenteller Daten verwenden wir jedoch statt dessen die Skalierungsfaktoren  $R_{\delta\Sigma} = R_{\rho\Sigma} = 2$  aus dem Quark-Modell. Genauere Untersuchungen sind jedoch notwendig.

Die Zusammensetzung von Neutronensternmaterie für die DD Wechselwirkung gleicht den Ergebnissen aus nicht-relativistischen Brückner-Rechnungen [119, 120], in denen auch das  $\Sigma^-$  vor dem  $\Lambda$  erscheint. Bei der Bonn A Parametrisierung beobachtet man die ersten Hyperonen erst bei relativ hohen Dichten von  $2.5\rho_0$ , was auch die steifere Zustandsgleichung erklärt. Auch in den DDRH-Rechnungen übersteigt für alle Wechselwirkungen bei hohen Dichten die Anzahl der Hyperonen diejenige der Nukleonen. Dieser Effekt ist für die Groningen Parametrisierung am stärksten ausgeprägt. Das gleiche Verhalten wurde auch in anderen Modellen, z.B. in [92, 95], beobachtet.

Wie bereits erwähnt wurde, ist ein Problem von einigen RMF-Parametrisierungen, die an endliche Kerne angepasst wurden, das Auftreten von negativen effektiven Massen in Neutronensternmaterie im Dichtebereich von  $\rho \approx 0.5 - 1 \text{ fm}^{-3}$  [19, 95]. Der Hauptgrund ist die kleine effektive Masse, die benötigt wird, um die experimentell beobachtete Spin-Bahn-Aufspaltung in endlichen Kernen zu beschreiben. Die effektive Masse sinkt wegen der nichtlinearen  $\sigma$ -Selbstwechselwirkungsanteile bei hohen Dichten stark ab und führt zu einer relativ steifen Zustandsgleichung. Dies zeigt, dass die Extrapolation phänomenologischer Wechselwirkungen zu hohen Dichten problematisch sein kann.

Im DDRH-Modell beobachtet man negative effektive Massen erst bei wesentlich höheren Dichten, wo die Gültigkeit des hadronischen Modells bereits fragwürdig ist, da Baryonen und Mesonen nicht mehr die relevanten Freiheitsgrade sind. Vielmehr erwartet man bei extrem hohen Dichten einen Übergang von der hadronischen in die Quark-Gluon-Phase. Dies ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Wir versuchen auch nicht wie in [95, 123], zu höheren Dichten zu extrapolieren, sondern stoppen die Berechnung der Zustandsgleichung, wenn negative effektive Massen auftreten.

Für die Bonn A Parametrisierung wird  $m_n^*$  negativ für Dichten  $\rho \approx 1 - 1.2 \text{ fm}^{-3} \approx 7 - 8\rho_0$ , hauptsächlich hervorgerufen durch den Anstieg der  $\sigma$ -Kopplung bei hohen Dichten. Für die Groningen Parametrisierung wird die effektive Masse des Neutrons bei  $\rho \approx 1.2 - 1.3 \text{ fm}^{-3} \approx 8\rho_0$  negativ. Die Ursache ist hier die leichte Reduzierung von  $m_n^*$  durch die zusätzliche Kopplung an das  $\delta$ -Meson. Bei der DD Parametrisierung



**Abb. 8.5:** Effektive Massen verschiedener dichteabhängiger Wechselwirkungen in Neutronensternmaterie in Modell 1 für die Skalierungssätze  $R_q$  (links) und  $R_m$  (rechts). Die Groningen Parameterisierung besitzt als einzige aufgrund des  $\delta$  Mesons unterschiedliche Protonen- und Neutronenmassen.

ist  $m^*$  selbst bei den höchsten betrachteten Dichten von  $\rho = 1.5 \text{ fm}^{-3}$  noch positiv. Die Eigenschaften der effektiven Massen werden noch einmal in Abbildung 8.5 für die Baryonen  $n$ ,  $p$  und  $\Lambda$  gezeigt. Die Wahl der Skalierungsfaktoren beeinflusst auch die effektive Massen der Hyperonen. Aufgrund der schwächeren Kopplung ist, wie aus Abbildung 8.5 ersichtlich,  $m_\Lambda^*$  für den mikroskopischen Skalierungssatz  $R_m$  größer als für die SU(6)–Werte  $R_q$ .

Das unterschiedliche Verhalten des DDRH–Modells im Vergleich zu Modellen mit konstanten Kopplungen geht zurück auf die dichteabhängigen, an DB–Selbstenergien angepassten, Vertizes. Da durch diese Dichteabhängigkeit Informationen aus einem größeren Dichtebereich, als in endlichen Kernen gefunden wird, berücksichtigt werden können, ist die Extrapolation zu hohen Dichten zuverlässiger. Die Mediumabhängigkeit der Vertizes beinhaltet implizit Korrekturterme höherer Ordnung, die teilweise mit den nichtlinearen Mesonen–Wechselwirkungstermen der RMF–Parametrisierungen identifiziert werden können. Dadurch ist auch verständlich, warum Modelle mit nichtlinearen Vektor–Wechselwirkungen [15, 86] bei höheren Dichten ein stabilisiertes Verhalten zeigen, dass den DB–Ergebnissen besser entspricht, und negative effektive Massen vermeidet.

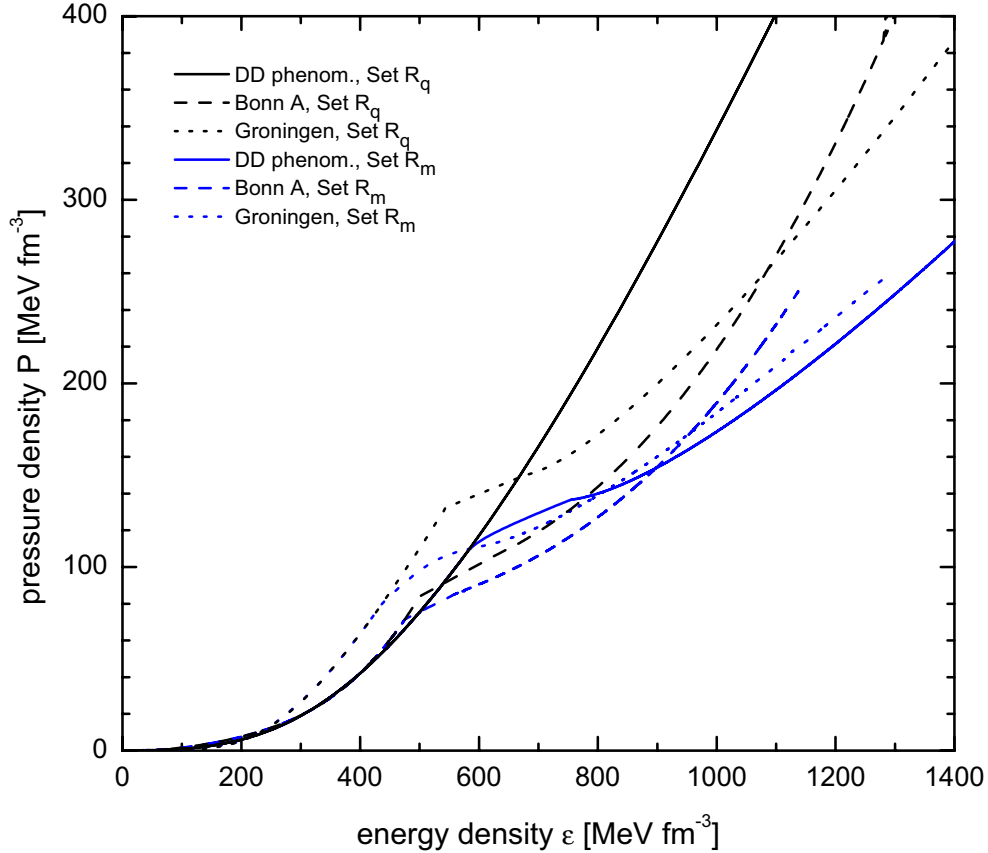
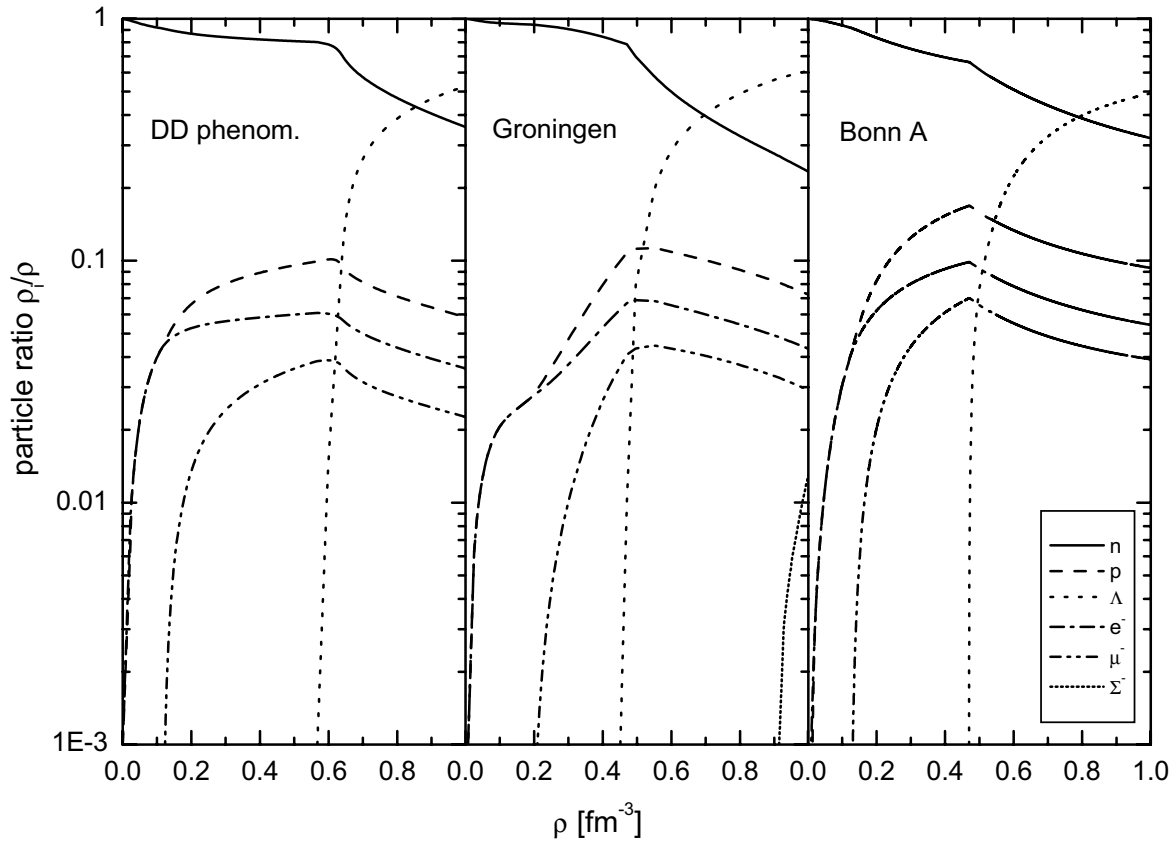


Abb. 8.6: Analog Abbildung 8.1, jedoch mit der Dichteabhängigkeit aus Modell 2.

### 8.3 Abhängigkeit der Vertizes von der $SU(3)_f$ -Multipllettdichte

Als nächstes wenden wir uns der Untersuchung von Modell 2 zu, in dem die Meson-Baryon-Vertizes von der  $SU(3)_f$ -Multipllettdichte der entsprechenden Baryonen abhängen. In Abbildung 8.6 zeigen wir die Zustandsgleichungen für die drei verschiedenen Wechselwirkungen. Die zugehörigen Baryonen- und Leptonenverteilungen sind in Abbildung 8.7 dargestellt. Im Vergleich zu Modell 1 liegt die Schwelle für das Auftauchen der Hyperonen erst bei sehr hohen Dichten von  $3\rho_0$ . Der Anteil der bei diesen Dichten erstmals beobachteten  $\Lambda$ -Hyperonen wächst sehr schnell an, was schon bei Dichten um  $3 - 4\rho_0$  dazu führt, dass mehr  $\Lambda$ -Hyperonen als Neutronen im Neutronenstern vorhanden sind. Dies führt bei niedrigeren Dichten zu einer härteren Zustandsgleichung als in Modell 1, die jedoch mit dem Auftreten der Hyperonen bei Energiedichten von  $\epsilon = 500 \text{ MeV fm}^{-3}$  sehr weich wird, was sich durch einen starken Knick in der EoS bemerkbar macht.

Die Unterdrückung der Hyperonen in Modell 2 liegt an der komplizierteren Dichteabhängigkeit der Vertizes. Die Rearrangementselbstenergien sind für jedes Multipllett verschieden. Die führt zu einer relativen Verschiebung zwischen den chemischen Potentialen der Multipletts, z.B. zwischen  $\mu_N$  und  $\mu_\Lambda$ , die das Auftreten der Hyperonen erschwert. Die Unterschiede zwischen verschiedenen Skalierungsfaktoren sind für



**Abb. 8.7:** Zusammensetzung von Neutronensternmaterie im DDRH-Modell in Modell 2. Gezeigt werden Rechnungen für die verschiedenen dichteabhängigen Wechselwirkungen mit den mikroskopischen Skalierungsfaktoren  $R_m$ .

die Bonn A Parametrisierung, welche die stärkste Dichteabhängigkeit besitzt, am schwächsten ausgeprägt und fallen für die am schwächsten dichteabhängige DD Parametrisierung am größten aus. Dies ist ein Hinweis darauf, dass in Modell 2 die Eigenschaften der Zustandsgleichung hauptsächlich von der Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung abhängen.

Wie man aus Abbildung 8.7 für den mikroskopischen Skalierungssatz  $R_m$  erkennen kann, erscheinen die Hyperonen in der DD Parametrisierung bei höheren Dichten als in den Parametrisierungen der mikroskopischen NN-Potentiale. Die Behandlung des kompletten Baryonenoktetts kann nur unter Verwendung der  $R_{\alpha Y}$  aus der  $SU(6)$ -Symmetrie erfolgen. Die damit einhergehende stärkere Vektorrepulsion der Hyperonen führt dazu, dass diese in der DD Wechselwirkung komplett unterdrückt werden. Man erkennt dies durch die deutlich steifere DD EoS in Abbildung 8.6. Auch für die anderen Modelle ergibt sich für diese Wahl eine deutliche Verschiebung der  $\Sigma$ - und  $\Xi$ -Hyperonen im Vergleich zu Modell 1 zu höheren Dichten ( $\rho > 0.7 \text{ fm}^{-3}$ ) bzw. eine komplette Unterdrückung dieser Hyperonen im untersuchten Dichtebereich. Die Zustandsgleichung wird deshalb hauptsächlich durch die  $\Lambda$ -Hyperonen beeinflusst,  $\Sigma$ - und  $\Xi$ -Hyperonen haben keinen nennenswerten Effekt auf die EoS.

Für den mikroskopischen Skalierungssatz  $R_m$  besitzen alle Parametrisierungen eine sehr ähnliche Zustandsgleichung, die sich bei hohen Dichten den Ergebnissen von Modell 1 annähert. Die ist verständlich, da bei diesen Dichten der Strangeness-Anteil so hoch ist, dass sich die Dichteabhängigkeit von Modell 1 und 2 nur noch wenig unterscheidet (siehe Kapitel 7).

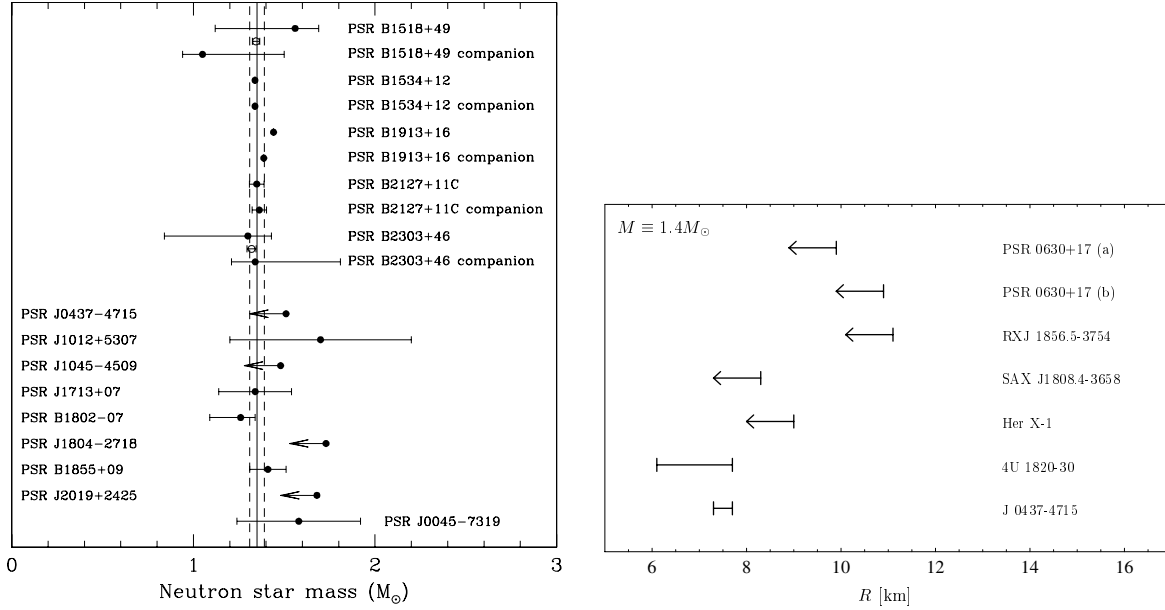
Wir folgern, dass die Zusammensetzung der Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie sehr stark von der Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung abhängt. In Modell 2 kann dies problematisch sein, da die Vertizes der Hyperon-Wechselwirkung, wenn die Hyperonen auftreten, mit den Dichten  $\rho_Y \approx 0$  der Baryonen-Multipletts berechnet werden müssen, obwohl die Gesamtdichte  $\rho_T \approx 3\rho_0$  beträgt. Die Eigenschaften der Hyperonen hängen also sehr stark vom Verhalten der Vertizes bei niedrigen Dichten ab. Dort muss jedoch extrapoliert werden, da keine zuverlässigen DB-Ergebnisse vorliegen. In Modell 1 tritt dieses Problem nicht auf, da die Vertizes für  $\rho_T \approx 2 - 3\rho_0$  sehr genau bestimmt sind. Andererseits zeigen die Ergebnisse aus Kapitel 7, dass sich die Eigenschaften von Modell 2 stärker an Brückner-Ergebnisse anlehnen. Verbesserte DB-Rechnungen im Niederdichtebereich werden es erlauben, diese Problematik genauer zu untersuchen. Abschließend sollte noch einmal darauf hingewiesen werden, dass eine realistischere Dichteabhängigkeit eine Mischung aus Modell 1 und 2 sein wird und direkt aus DB-Rechnungen für seltsame Kernmaterie bestimmt werden sollte.

# Kapitel 9

## Eigenschaften von Neutronensternen

Abschließend werden die Eigenschaften von Neutronensternen mit den in Kapitel 8 berechneten hadronischen Zustandsgleichung untersucht. Die makroskopischen Werte wie Masse und Radius eines Neutronensterns stehen in direktem Zusammenhang mit dem Verlauf der EoS. Die EoS ist also das Bindeglied zwischen der hadronischen Physik, mittels der sie berechnet wurde, und der Astrophysik, für die sie die zentrale Eingangsgröße bildet. Auch die zeitliche Entwicklung von Neutronensternen (z.B. Supernova, Protoneutronenstern) hängt von der EoS ab, hier ist jedoch ihre Zusammensetzung von entscheidender Bedeutung. So ist etwa der URCA-Kühlungsprozess [126] nur möglich, wenn der Protonen- und der Hyperonenanteil einen kritischen Wert überschreiten. Wir werden dies jedoch in dieser Arbeit nicht genauer untersuchen und verweisen unter anderem auf [92, 126] und Referenzen darin.

Der Vergleich zwischen experimentell beobachtbaren Massen und Radien und den mit der hadronischen EoS berechneten Größen erlaubt es uns, Rückschlüsse auf die Eigenschaften der EoS und der zugrundeliegenden mikroskopischen Wechselwirkung zu ziehen. Insbesondere sollte es möglich sein, Modelle auszuschließen, die nicht die experimentellen Beobachtungsdaten reproduzieren, und natürliche Grenzen für die in Kapitel 7 und 8 diskutierten Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$  zu bestimmen. Wir wissen heute, dass die meisten der beobachteten Neutronensterne Massen im Bereich von  $1.4M_{\odot}$  besitzen ( $M_{\odot} = 1.11 \times 10^{60}$  MeV bezeichnet dabei die Sonnenmasse). Abbildung 9.1 zeigt die Massen der derzeit am genauesten bekannten Neutronensterne. Darunter befinden sich auch Röntgen- und Radiopulsare. Die am genauesten bekannte Masse ist die des Hulse-Taylor binären Pulsars PSR 1913+16 mit  $1.44M_{\odot}$ , die bis auf einen Fehler von  $10^{-3}M_{\odot}$  bestimmt wurde. Man gewinnt daraus eine Untergrenze von  $\sim 1.4M_{\odot}$  für die minimale Masse, die in den Rechnungen erreicht werden sollte. Zustandsgleichungen mit maximal möglichen Massen  $< 1.4M_{\odot}$  können somit ausgeschlossen werden. Eine Bestimmung der maximal erlaubten Massen ist hingegen nicht möglich, da manche Messwerte sehr große Fehler besitzen und auch Massen  $> 2.2M_{\odot}$  zulassen. Abbildung 9.1 zeigt auch einige experimentelle Radienabschätzungen, die jedoch mit großen Unsicherheiten behaftet sind, da sie nur indirekt und unter Zuhilfenahme zusätzlicher Modellannahmen bestimmt werden konnten. Allerdings geht die Tendenz zu sehr klei-



**Abb. 9.1:** Beobachtete Neutronensternmassen in Einheiten der Sonnenmasse  $M_\odot$  (links). Experimentelle Radianabschätzungen für verschiedene Neutronensterne unter der Annahme, dass diese eine typische Neutronensternmasse von  $M = 1.4M_\odot$  aufweisen (rechts). Die Abbildungen stammen aus Referenz [128].

nen Radien  $< 11$  km. Zustandsgleichungen, die zu große Radien vorhersagen, können daher möglicherweise ausgeschlossen werden. Diese Daten müssen jedoch mit Vorsicht betrachtet werden, so dass hier noch keine eindeutige Aussage möglich ist. Eine detaillierte Diskussion der experimentellen Massen- und Radianbestimmung findet man in [92, 127, 128] und Referenzen darin.

## 9.1 Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen

Neutronensterne sind extrem kompakte Objekte und müssen deshalb im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden. Eine einfache Abschätzung zeigt, dass allgemeinrelativistische Effekte, also z.B. die Änderung der Metrik zwischen Sternradius und seinem Zentrum, von der Ordnung

$$\frac{2GM}{R} \approx 0.4, \quad \text{Gravitationskonstante } G = 6.7 \times 10^{-45} \text{ MeV} \quad (9.1)$$

sind [129]. Dabei sind  $M$  die Masse und  $R$  der Radius des Sterns. Im Vergleich dazu findet man für die Sonne Korrekturen von  $6 \times 10^{-6}$  und für die Erde sogar nur  $2 \times 10^{-9}$ . Die Struktur eines Neutronensterns ist durch die Einsteinschen Feldgleichungen festgelegt

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}(\epsilon, P(\epsilon)). \quad (9.2)$$



Diese Gleichungen verbinden den von der allgemeinrelativistischen Metrik abhängenden Krümmungstensor  $G_{\mu\nu}$  mit dem im thermodynamischen und mechanischen Gleichgewicht berechneten Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu} = (P + \epsilon)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}P$  der hadronischen Materie und drücken die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts aus (für einen statischen Neutronenstern). Eine selbstkonsistente Beschreibung würde auch die Berechnung von  $T_{\mu\nu}$  in der Metrik des gekrümmten Raumes des Neutronensterns erfordern. Die Skala der typischen Abstände der Nukleonen und der hadronischen Wechselwirkung beträgt jedoch 1 fm, während sich die Metrik des Sterns über einen Bereich von mehreren Kilometern ändert. Es können deshalb in sehr guter Näherung (relative Änderung der Metrik  $< 10^{-18}$ ) der Energie-Impuls-Tensor im flachen Raum berechnet und die in Kapitel 8 bestimmten Zustandsgleichungen verwendet werden.

Für einen sphärisch symmetrischen Stern ist die Schwarzschild-Metrik anzusetzen

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9.3)$$

wobei die metrische Funktion  $\lambda(r)$  im Innern des Sterns als

$$e^{2\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}, \quad r \leq R \quad (9.4)$$

definiert ist. Die gravitative Masse  $M(r)$ , die in einer Kugel mit dem Radius  $R$  enthalten ist, wird dabei über folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) \quad (9.5)$$

Die metrische Funktion  $\nu(r)$  genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = -\frac{1}{P(r) + \epsilon(r)} \frac{dP(r)}{dr}, \quad r \leq R. \quad (9.6)$$

Dadurch lassen sich die Einsteinschen Feldgleichungen auf die bekannte Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung reduzieren [129]

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \frac{[P(r) + \epsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{1 - \frac{2GM(r)}{r}}, \quad (9.7)$$

die numerisch gelöst werden kann. Eine genauere Herleitung dieser Gleichung und eine Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie findet man z.B. in [92, 130].

Für eine gegebene Zustandsgleichung in der Form  $P(\epsilon)$  lassen sich nun durch Integration von Gl. (9.7) und Gl. (9.5) die relevanten Größen bestimmen. Man startet dabei im Zentrum  $r = 0$  des Sterns mit einem beliebigen zentralen Druck  $P_c = P(0)$  und integriert nach außen, bis die Oberfläche des Sterns ( $r = R$ ) erreicht ist. Diese ist durch verschwindenden Druck  $P(R) = 0$  definiert ist. Man erhält so die gravitative Masse  $M \equiv M(R) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \epsilon(r)$  eines Sterns mit Radius  $R$ . Für eine gegebene Zustandsgleichung in der Form  $P(\epsilon)$  kann man damit Masse  $M$  und Radius  $R$  eines Neutronensterns mit einem Zentraldruck  $P_c$  berechnen. Die Variation des Zentraldruckes führt zu

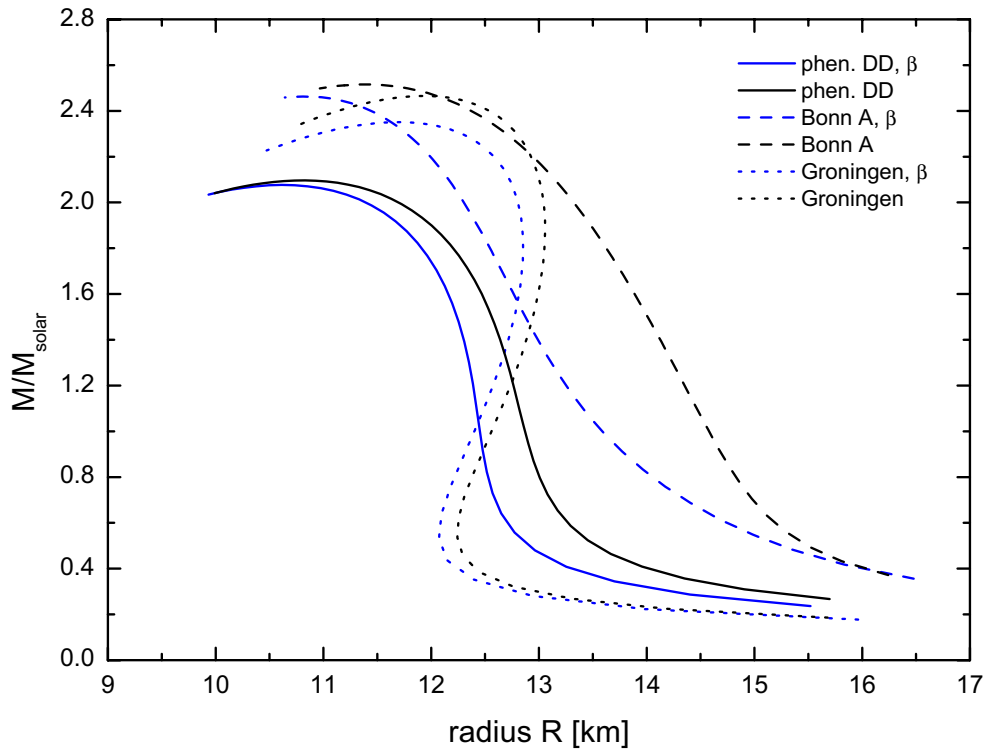
einer Sequenz von stabilen Neutronensternen, die durch eine Masse–Radius–Relation  $M(R)$  beschrieben werden kann.

In der Neutronensternkruste, die aus Atomen bzw. Kernen und Elektronen mit ihren eigenen spezifischen Freiheitsgraden besteht, herrschen subnuklearer Dichten, die nicht im Rahmen der Brückner–Theorie durch die NN–Wechselwirkung beschrieben werden können. Vielmehr ist es notwendig, auf andere Modelle zurückzugreifen. Obwohl die Neutronensternkruste nur etwa 1% zur Gesamtmasse des Sterns beiträgt und die maximale Masse nur unwesentlich verändert, liegt ihre Dicke typischerweise im Bereich von 10% des Neutronensternradius und beeinflusst die Größe sehr leichter Neutronensterne.

Die EoS kann in mehrere relevante Dichtebereiche eingeteilt werden. Für  $\rho < 4.3 \times 10^{11} \text{g/cm}^3$  besteht die Materie aus Kernen und entarteten, relativistischen Elektronen. Mit steigender Dichte werden die Kerne neutronenreicher. Der Druck wird von den Elektronen bestimmt. Oberhalb der Dichte von  $4.3 \times 10^{11} \text{g/cm}^3$ , der sogenannten „neutron drip density“, verlassen die am schwächsten gebundenen Neutronen die Kerne und bilden ein Fermigas. Der Druck wird mit weiter steigender Dichte immer mehr von den Neutronen bestimmt. Die Struktur der einzelnen Kerne bleibt bis zu Dichten von  $2 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$  erhalten, danach lösen sich die Kerne vollständig auf und können im Rahmen der DDRH–Theorie als unendlich Kernmaterie beschrieben werden. Die Zustandsgleichung unterhalb der Kernmateriedichte ist zuverlässig bestimmt worden. Wir verwenden die Ergebnisse von Baym, Pethick und Sutherland für Dichten  $\rho < 0.001 \text{fm}^{-3}$  [131] und Ergebnisse von Negele und Vautherin für Dichten  $\rho \geq 0.001 \text{fm}^{-3}$  [132]. Den Übergang zu der DDRH–EoS bestimmen wir durch den Schnittpunkt beider Zustandsgleichungen in der Form  $p(\epsilon)$ . In Abhängigkeit von der verwendeten Wechselwirkung ergeben sich Werte zwischen  $0.3\rho_0$  und  $0.7\rho_0$ .

Bis jetzt wurde noch nicht die Existenz eines möglichen pseudoskalaren Kondensats von Kaonen diskutiert [133]. Rechnungen, die auf chiraler Störungstheorie beruhen, zeigen, dass dessen Auftreten für Dichten um  $3 - 4\rho_0$  möglich ist [134]. Diese Rechnungen berücksichtigen allerdings nicht das Auftreten von Hyperonen in diesem Dichtebereich. Rechnungen im RMF–Modell zeigen hingegen, dass die Existenz von Hyperonen die Schwelle für das Kondensat zu wesentlich höheren Dichten verschiebt und ein Kaonen–Kondensat auch bei sehr hohen Dichten eher unwahrscheinlich ist [94, 95].

Bei extrem hohen Dichten und den damit verbundenen geringen Abständen der Baryonen kann ein Deconfinement–Phasenübergang von der hadronischen in die Quark–Gluon–Phase stattfinden. Aufgrund der asymptotischen Freiheit innerhalb der QCD kann dann die Materie als freies Fermigas aus u-, d-, s-Quarks und Leptonen beschrieben werden. Der Phasenübergang zu einer Mischphase aus Hadronen und Quarks wird gewöhnlich im phänomenologischen MIT Bag–Modell [135] beschrieben und hängt stark von der verwendeten Bag–Konstante, deren Wert als relativ unsicher angesehen werden kann, und der hadronischen EoS ab. Die Quarkphase führt zu einer weicheren Zustandsgleichung und reduziert die maximale Masse und insbesondere den Radius von Neutronensternen [128, 136, 137]. Wir beschränken uns hier jedoch auf die Untersuchung von hadronischen Zustandsgleichungen und mikroskopischer Wechselwirkungen.

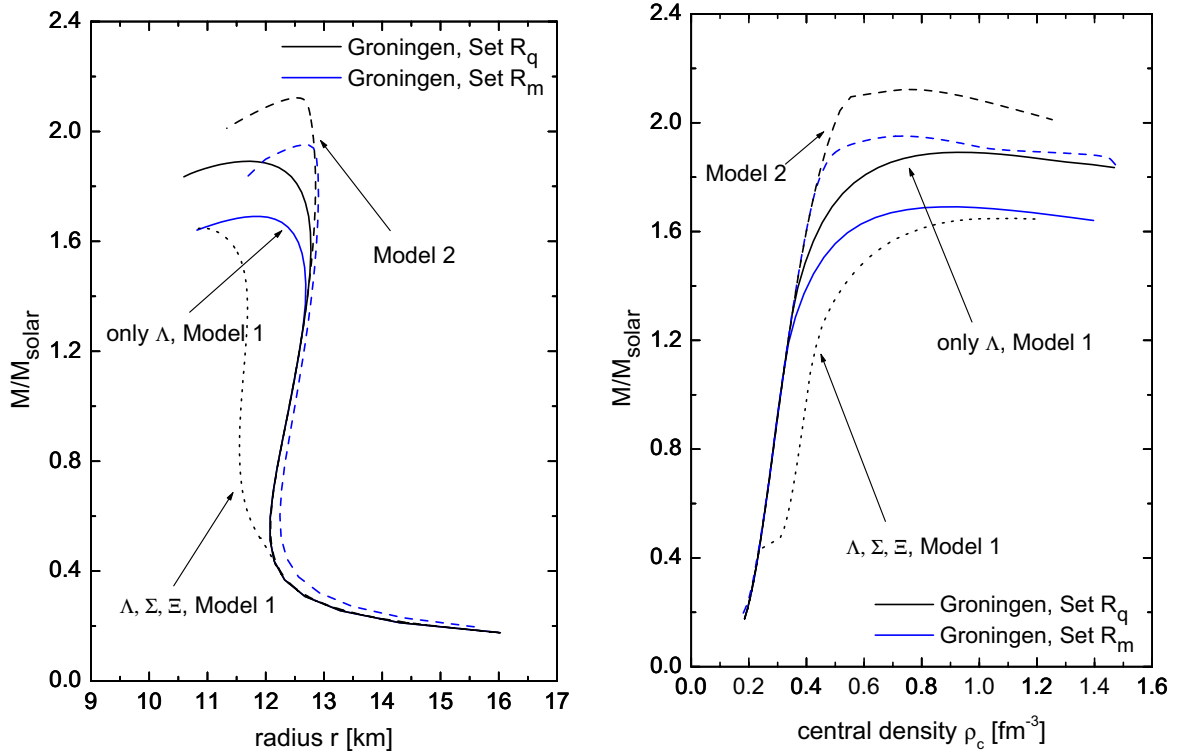


**Abb. 9.2:** Einfluß des  $\beta$ -Gleichgewichts auf die Masse-Radius-Relationen verschiedener dichteabhängiger Wechselwirkungen. Die zu größeren Radien verschobenen Linien gehören zu Zustandsgleichung aus reiner Neutronenmaterie, die sich nicht im  $\beta$ -Gleichgewicht befinden.

## 9.2 Masse-Radius Relationen

Wir zeigen als erstes Masse-Radius-Relation für rein nukleonische Kernmaterie, die durch Lösen der TOV-Gleichungen berechnet wurden. Wir verwenden dazu die drei verschiedenen dichteabhängigen Wechselwirkungen, die bereits in Kapitel 7 untersucht wurden. Rein nukleonische Zustandsgleichungen sind bei hohen Dichten steifer als hadronischen Zustandsgleichungen mit Hyperonen, da vor allem der kinetische Druck der Neutronen wesentlich höher ist. Reine Neutronenmaterie sollte aus diesem Grund dem Gravitationskollaps eines Neutronensterns bei hohen Massen den meisten Widerstand leisten. Auf diese Weise ist es möglich, eine Obergrenze für die mit einer bestimmten Wechselwirkung mögliche maximale Masse zu erhalten. Oberhalb dieser Masse kann die Gravitationsanziehung nicht mehr kompensiert werden und der Stern kollabiert zu einem Schwarzen Loch.

Ergebnisse werden Abbildung 9.2 gezeigt. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Kapitel 8 besitzt die DD Parametrisierung als weichste EoS auch mit  $2.1M_{\odot}$  die kleinste maximale Masse. Für die Groningen und Bonn A Parametrisierungen findet man  $2.47M_{\odot}$  bzw.  $2.53M_{\odot}$ . Reine Neutronenmaterie ist jedoch ein hypothetischer, instabiler Zustand. Eine Berechnung der nukleonischen Zustandsgleichungen im schwachen  $\beta$ -Gleichgewicht ( $p, n, e^-, \mu^-$ ) reduziert den Druck durch die zusätzlichen Frei-



**Abb. 9.3:** Neutronensternmassen als Funktion der Zentraldichte (rechts) und des Radius (links) für die Groningen Parametrisierung in den untersuchten Modellen. Die obere Linie eines jeden Modells entspricht jeweils Rechnungen mit dem SU(6)–Skalierungssatz  $R_q$ , die untere Rechnungen mit dem mikroskopischen Satz  $R_m$ . Für detaillierte Erklärungen siehe Text.

heitsgrade und ergibt eine etwas weichere EoS. Wie man aus Abbildung 9.2 erkennen kann, reduzieren sich die maximalen Massen der unterschiedlichen Wechselwirkungen jedoch fast nicht ( $< 0.1M_{\odot}$ ). Im Gegensatz dazu führt die Berücksichtigung des  $\beta$ -Gleichgewichts zu deutlich kleineren Radien für typische Neutronensterne mit Massen von  $1.4M_{\odot}$ . Dies ist mit ca. 1 km bei der Bonn A Parametrisierung am stärksten, beim Groningen Potential mit ca. 0.25 km am schwächsten ausgeprägt.

Eine realistische Beschreibung muss jedoch das Auftreten von Hyperonen berücksichtigen, wie in Kapitel 8 gezeigt wurde. Abbildung 9.3 zeigt die Masse einer Sequenz von Neutronensternen als Funktion der Zentraldichte (rechts) und als Funktion des Radius (links), berechnet mit den Zustandsgleichungen der Groningen Parametrisierung aus Kapitel 8. Berücksichtigt man nur die  $\Lambda$ -Hyperonen findet man in Modell 1 für den SU(6)–Skalierungssatz  $R_q$  maximale Massen von  $M_{\text{max}} = 1.89M_{\odot}$ . Für die mikroskopische Wahl  $R_m$  ergibt sich wegen der weicheren EoS eine reduzierte Masse  $M_{\text{max}} = 1.69M_{\odot}$ . Für die EoS, die das komplette Baryonen–Oktett enthält, findet man einen noch geringeren Wert von  $M_{\text{max}} = 1.65M_{\odot}$ , der jedoch noch deutlich über der aus Abbildung 9.1 extrahierten Mindestmasse von  $1.4M_{\odot}$  liegt.

Die maximale Dichte, die im Innern eines Sterns erreicht werden kann, liegt bei allen drei Zustandsgleichungen zwischen  $\rho_c \simeq 0.90 - 0.99 \text{ fm}^{-3}$ , was etwa  $5 - 6\rho_0$  ent-

	$M_{max}$	$R_{min}$ [km]	$\rho_{max}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$M$	$R$ [km]	$\rho_c$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]
Mod. 1, $R_m$ , ( $\Lambda$ )	1.69	11.84	0.90	1.4	12.70	0.37
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda$ )	1.89	11.66	0.91	1.4	12.70	0.37
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	1.65	10.85	0.99	1.4	11.70	0.54
Mod. 2, $R_m$ , ( $\Lambda, \Sigma$ )	1.95	12.68	0.73	1.4	12.70	0.37
Mod. 2, $R_q$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	2.12	12.56	0.74	1.4	12.70	0.37

**Tab. 9.1:** Groningen Parametrisierung: Maximale Neutronensternmassen, -radien und -zentraldichten sowie Radius und Zentraldichte für einen Neutronenstern mit 1.4 Sonnenmassen  $M$ .

spricht. Allerdings ist bei schweren Sternen die Abhängigkeit der maximalen Masse von der Zentraldichte nur sehr schwach ausgeprägt, wie aus Abbildung 9.3 ersichtlich ist. Es tritt also eine Sättigung der Masse ein. Im Gegensatz dazu reagieren Sterne im Bereich von  $M = 1.4M_\odot$  sehr sensitiv auf kleine Änderungen der Zentraldichte (und damit auch des Zentraldruckes). Man kann dies auch so formulieren, dass in den experimentell beobachteten Neutronensternen in etwa die gleichen Zentraldichten herrschen. Für die Zustandsgleichungen, die nur  $\Lambda$ -Hyperonen enthalten findet man dort Dichten  $\rho_c \simeq 0.37 \text{ fm}^{-3} \simeq 2.5\rho_0$ . Da in diesem Dichtebereich der Stern hauptsächlich aus Nukleonen besteht, sind die Ergebnisse fast unabhängig von der Wahl der Skalierungsfaktoren. Die alle Hyperonen enthaltende EoS ist hingegen viel weicher und braucht dementsprechend eine höhere Energiedichte, um den gleichen Widerstand gegen die Gravitation zu erreichen. Dies macht sich durch eine deutlich höhere Zentraldichte von  $\rho_c = 0.54 \text{ fm}^{-3} \simeq 3\rho_0$  bemerkbar. Dieses Verhalten ist bei der Groningen Parametrisierung sehr stark ausgeprägt, und wird durch die schon bei etwa  $\rho = 0.2 \text{ fm}^{-3}$  auftretenden  $\Sigma^-$ -Hyperonen verursacht. Dies wird noch einmal sehr schön durch den Knick oberhalb von  $M = 0.4M_\odot$  in Abbildung 9.3 gezeigt. Dies führt gleichzeitig zu einer starken Reduzierung der Radien der Neutronensterne um ungefähr einem Kilometer, wie aus dem linken Teil der Abbildung erkennbar ist (von  $R = 12.7 \text{ km}$  auf  $R = 11.7$  bei  $M = 1.4M_\odot$ ).

Wir folgern daraus, dass die Eigenschaften der EoS bei niedrigeren Dichten die Radien stark beeinflussen. Im Gegensatz dazu reduziert sich bei den anderen Zustandsgleichungen erst bei wesentlich höheren Massen der Radius, da hier die Hyperonen auch erst bei höheren Dichten auftreten. Mit zunehmender Masse schrumpfen die Sterne. Der kleinste möglich Radius ist derjenige von Sternen mit der größten Masse. Sterne mit kleineren Radien sind instabil und kollabieren. Eine Berücksichtigung aller Hyperonen führt zu einer Reduzierung der Radien von  $R_{min} \simeq 11.7 \text{ km}$  auf  $R_{min} \simeq 10.8$  im Vergleich zu den  $\Lambda N$ -Zustandsgleichungen. Diese schweren Sterne bestehen größtenteils aus Hyperonen, wie man durch einen Vergleich mit Abbildungen 8.2 und 8.4 erkennen kann.

Modell 2 sagt erheblich höhere Massen von  $M_{max} = 1.95M_\odot$  (mikroskopischer Skalierungssatz  $R_m$ ) bzw.  $M_{max} = 2.12M_\odot$  (SU(6)-Werte  $R_q$ ) voraus, die sich durch das späte Erscheinen der Hyperonen bei sehr hohen Dichten erklären lassen. Im Zentrum der mit Modell 2 berechneten Sterne werden nur Dichten von  $\rho_c \simeq 0.73 \text{ fm}^{-3} \simeq 3\rho_0$

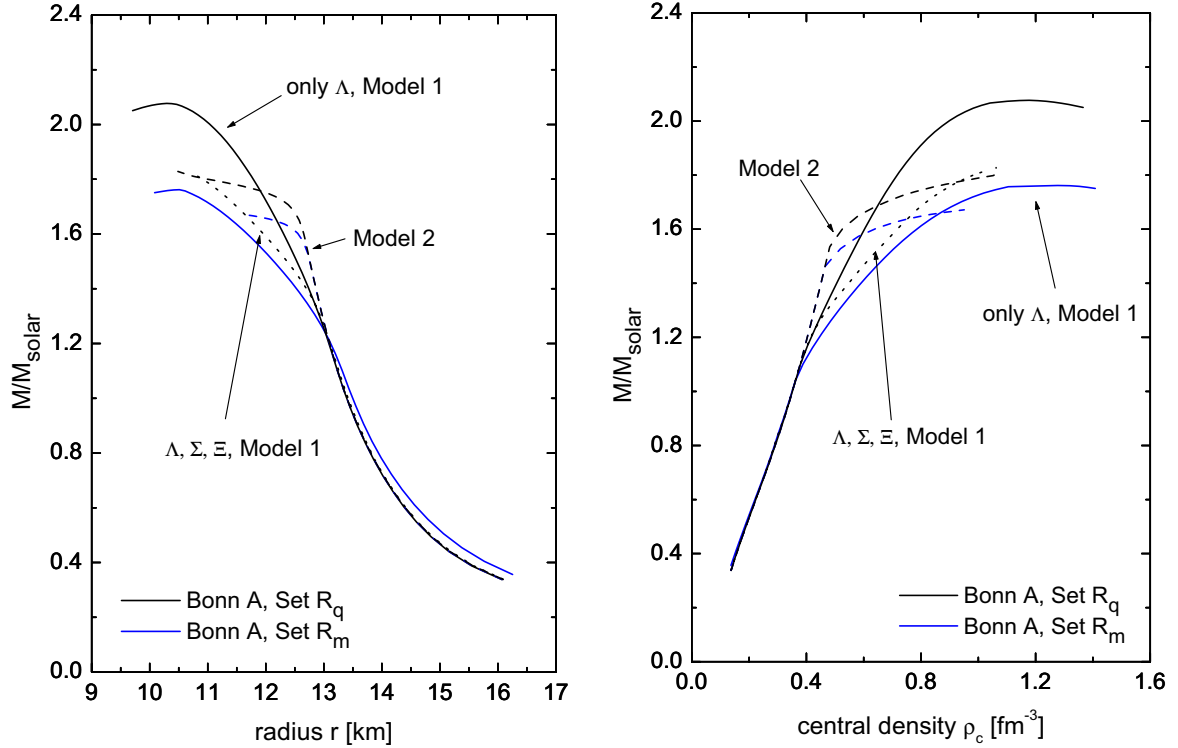


Abb. 9.4: Bonn A Parameterisierung; analog Abbildung 9.3

erreicht, so dass diese noch vermehrt aus Nukleonen bestehen. Die diskutierten Ergebnisse sind in Tabelle 9.1 zusammengestellt. Die Dichteabhängigkeit von Modell 1, die kleinere maximale Massen liefert, ist in besserer Übereinstimmung mit Rechnungen anderer Gruppen. In Modell 2 hingegen ist der Einfluss der Hyperonen sehr gering, was zu den beobachteten hohen Maximalmassen führt. Bemerkenswert ist der starke Einfluss der Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$  auf den Verlauf der Masse–Radius–Relation. Der Unterschied in den Maximalmassen zwischen den beiden Wahlen der Skalierungssätze  $R_q$  und  $R_m$  ist in etwa vergleichbar mit dem Einfluss zusätzlicher Hyperonen in der EoS. Diese Eigenschaft sollte auch in RMF–Modellen mit konstanten Kopplungen genauer untersucht werden, da dort gewöhnlich nur die SU(6)–Skalierungsfaktoren Verwendung finden.

Mit der Bonn A Parametrisierung findet man vergleichbare Ergebnisse, wie aus Abbildung 9.4 und Tabelle 9.2 ersichtlich ist. Die maximalen Massen betragen für Modell 1  $M_{\max} = 1.76M_{\odot}$  ( $R_m$ ) bzw.  $M_{\max} = 2.07M_{\odot}$  ( $R_q$ ), falls nur  $\Lambda$ -Hyperonen berücksichtigt werden, und sind damit höher als bei der Groningen Parametrisierung. Dies wird durch die steifere Zustandsgleichung erklärt. Auch die Zentraldichte ist mit  $\rho_c \simeq 1.15 - 1.27 \text{ fm}^{-3} \simeq 7 - 8\rho_0$  erhöht. Die Berechnung der EoS mit allen Hyperonen führt zu negativen effektiven Massen oberhalb von  $\rho_c \simeq 1.02 \text{ fm}^{-3}$ . Der Stern hat dort eine Masse von  $M = 1.81M_{\odot}$ . Dies entspricht jedoch noch nicht seiner Maximalmasse, da noch keine Sättigung eingetreten ist. In Tabelle 9.2 wird dies durch ein + hinter den Werten für die maximale Masse und die Zentraldichte bzw. ein – hinter dem minimalen Radius gekennzeichnet. Das DDRH Modell kann hier also für höhere Dichten nicht mehr

	$M_{max}$	$R_{min}$ [km]	$\rho_{max}$ [fm $^{-3}$ ]	$M$	$R$ [km]	$\rho_c$ [fm $^{-3}$ ]
Mod. 1, $R_m$ , ( $\Lambda$ )	1.76	10.46	1.27	1.4	12.52	0.59
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda$ )	2.07	10.39	1.15	1.4	12.73	0.50
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	1.81+	10.80-	1.02+	1.4	12.68	0.55
Mod. 2, $R_m$ , ( $\Lambda, \Sigma$ )	1.67+	11.60-	0.94+	1.4	12.86	0.45
Mod. 2, $R_q$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	1.83+	10.40-	1.05+	1.4	12.86	0.45

**Tab. 9.2:** Bonn A Parametrisierung; analog Tabelle 9.1. Ein + hinter dem Wert für die Masse (Zentraldichte) bedeutet, dass die maximal Masse (Zentraldichte) im Verlauf der Rechnung nicht erreicht wurde und möglicherweise größer ist. Entsprechend sind mögliche kleinere Radien durch ein - gekennzeichnet.

angewendet werden. Dies ist jedoch kein Problem, da die berechneten Massen bereits groß genug sind, um die experimentellen Daten erklären zu können. Die Radien sind in diesem Bereich  $< 10.8$  km. In Modell 2 treten negative effektive Massen für ungefähr die gleiche Zentraldichte auf. Die Massen betragen dort  $> 1.67M_\odot$  bzw.  $> 1.83M_\odot$  und die Radien sind  $< 11.6$  km bzw.  $< 10.4$  km. Trotz dieser Unterschiede liegen die Radien, die von allen Zustandsgleichungen für Neutronensternen mit  $1.4M_\odot$  vorhergesagt werden, im Bereich von  $R = 12.5\text{--}12.8$  km, was vergleichbar mit den Ergebnissen der Groningen Parametrisierung ist.

Masse-Radius-Relationen für die phänomenologische DD Wechselwirkung werden zum Vergleich in Abbildung 9.5 gezeigt. Ergebnisse für Massen, Radien und Zentraldichten findet man in Tabelle 9.3. Wie in Kapitel 8 gezeigt wurde, besitzt die DD Parametrisierung bei höheren Dichten die weichste EoS. Dadurch findet man auch mit  $M_{max} = 1.43M_\odot$  ( $R_m$ ) bzw.  $M_{max} = 1.66M_\odot$  ( $R_q$ ) (Modell 1, nur  $\Lambda$ ) und  $M_{max} = 1.44M_\odot$  (Modell 1, alle Hyperonen) die kleinsten Neutronensternmassen. Obwohl diese Massen bereits sehr klein sind, sind sie immer noch in Übereinstimmung mit den beobachteten Neutronensternmassen. Die weiche Zustandsgleichung reduziert auch die minimalen Radien der Sterne auf  $R_{min} \simeq 10.3$  km, während der Radius eines Sterns mit  $1.4M_\odot$  bis auf  $R \simeq 10.68$  km sinken kann, wenn alle Hyperonen berücksichtigt werden. Diese Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den beobachteten Radien  $< 11$  km aus Abbildung 9.1. Auch hier sagt Modell 2 höhere Massen ( $M_{max} = 1.77M_\odot$  bzw.  $M_{max} = 2.08M_\odot$ ) voraus, da die Sterne hauptsächlich aus Nukleonen bestehen. Die DD Parametrisierung erreicht im Sternzentrum sehr hohe Dichten von  $\rho_c \simeq 1.34$  fm $^{-3} \simeq 8.5\rho_0$  (Modell 1) bzw.  $\rho_c \simeq 1.1$  fm $^{-3}$  (Modell 2).

Ein Vergleich mit den Masse-Radius-Relationen aus Abbildung 9.1 zeigt, dass die Berücksichtigung des Baryonenoktetts die maximale Masse von Neutronensternen um  $\Delta M \sim 0.5 - 0.7M_\odot$  reduziert. Dieses Ergebnis ist in sehr guter Übereinstimmung mit anderen Modellen [118, 119, 120].

Die vorhergesagten maximalen Massen hängen stark von den Eigenschaften der Meson-Hyperon-Vertizes ab. Sowohl die Wahl der Skalierungsfaktoren als auch insbesondere die verschiedenen Dichteabhängigkeiten beeinflussen den Verlauf der Masse-Radius-Relationen bei hohen Dichten. Trotz dieser Unterschiede sind die berechneten Radien in allen Modellen für die drei untersuchten Wechselwirkungen sehr ähnlich.

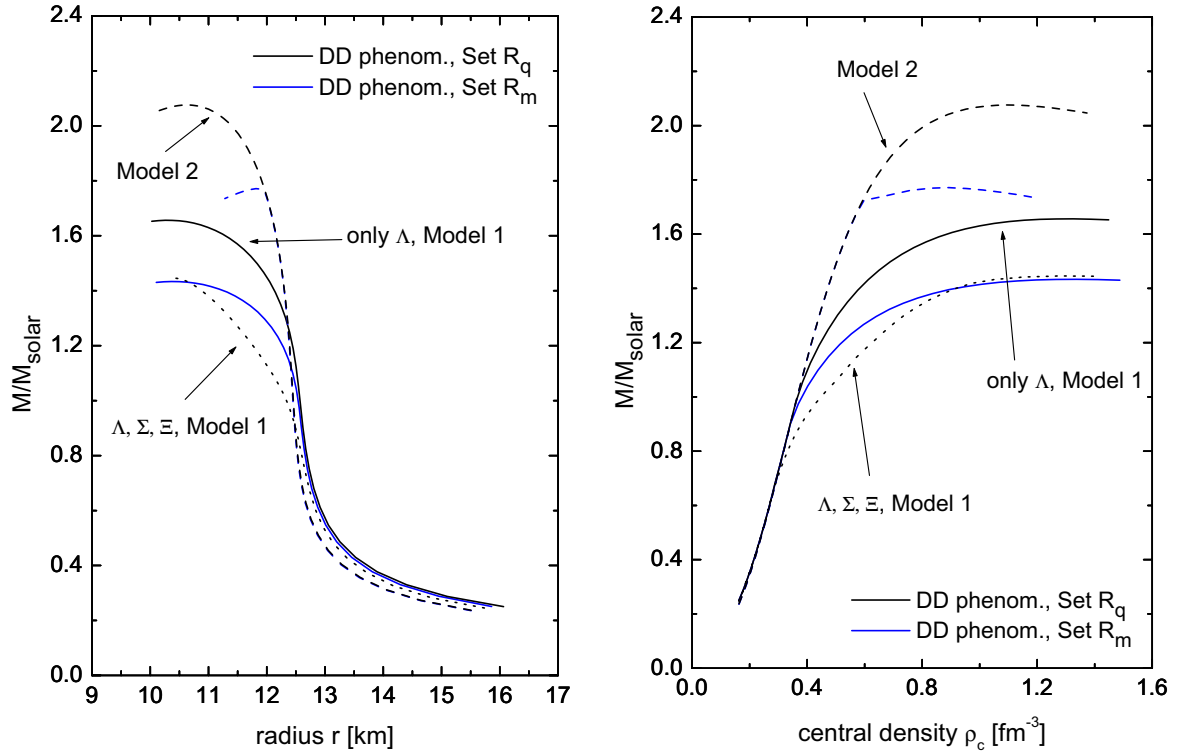


Abb. 9.5: Phänomenologische Dichteabhängigkeit; analog Abbildung 9.3

Für einen Neutronenstern mit der typischen Masse von  $M = 1.4M_{\odot}$  sagen alle Modelle einen Radius von ungefähr 12.5 km voraus (der für die DD Parametrisierung jedoch bis auf 10.68 km schrumpfen kann), und der minimale Radius kann bis auf 10.3 km sinken. Die Erklärung ist, dass die Radien hauptsächlich von den Eigenschaften der EoS bei niedrigen und mittleren Dichten abhängen. In diesem Bereich wurde die Dichteabhängigkeit der Vertizes jedoch an DB-Ergebnisse angepasst und ist daher für alle Wechselwirkungen sehr ähnlich. Die maximalen Massen hingegen werden stark von der Dichteabhängigkeit der Wechselwirkungen bei hohen Dichten beeinflusst, die in Modell 1 und 2 und für die verschiedenen Parametrisierungen sehr unterschiedlich ist.

Ein Vergleich der berechneten Masse–Radius–Relationen mit Ergebnissen anderer Modelle wird in Abbildung 9.6 gezeigt. Die gefundenen Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit nicht-relativistischen Brückner–Rechnungen [119, 120, 137] und relativistischen Hartree–Fock–Rechnungen (mit an das Bonn A NN–Potential angepassten Kopplungskonstanten) [123], die Radien von 10 – 12 km vorhersagen und auch eine relativ weiche EoS besitzen. Im Gegensatz dazu finden die meisten RMF–Rechnungen mit dichteunabhängigen Kopplungen mit 13 – 15 km deutlich größere Radien [90, 136]. Unsere berechneten maximalen Neutronensternmassen von  $1.44\text{--}1.8M_{\odot}$  stimmen andererseits stärker mit den Ergebnissen verschiedener RMF–Rechnungen überein, während nicht-relativistische Brückner–Rechnungen Massen um  $\sim 1.3M_{\odot}$  favorisieren. Diese sind jedoch zu gering, um die beobachteten Neutronensterne beschreiben zu können, was ein Hinweis darauf ist, dass die nicht-relativistische EoS bei hohen Dichten zu weich sein könnte. Dies ist verständlich, da dort relativistische Effekte wichtig wer-



	$M_{max}$	$R_{min}$ [km]	$\rho_{max}$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]	$M$	$R$ [km]	$\rho_c$ [ $\text{fm}^{-3}$ ]
Mod. 1, $R_m$ , ( $\Lambda$ )	1.43	10.36	1.34	1.4	11.27	0.92
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda$ )	1.66	10.32	1.30	1.4	12.13	0.58
Mod. 1, $R_q$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	1.44	10.37	1.34	1.4	10.68	0.92
Mod. 2, $R_m$ , ( $\Lambda, \Sigma$ )	1.77	11.18	0.88	1.4	12.30	0.47
Mod. 2, $R_m$ , ( $\Lambda, \Sigma, \Xi$ )	2.08	10.64	1.10	1.4	12.30	0.47

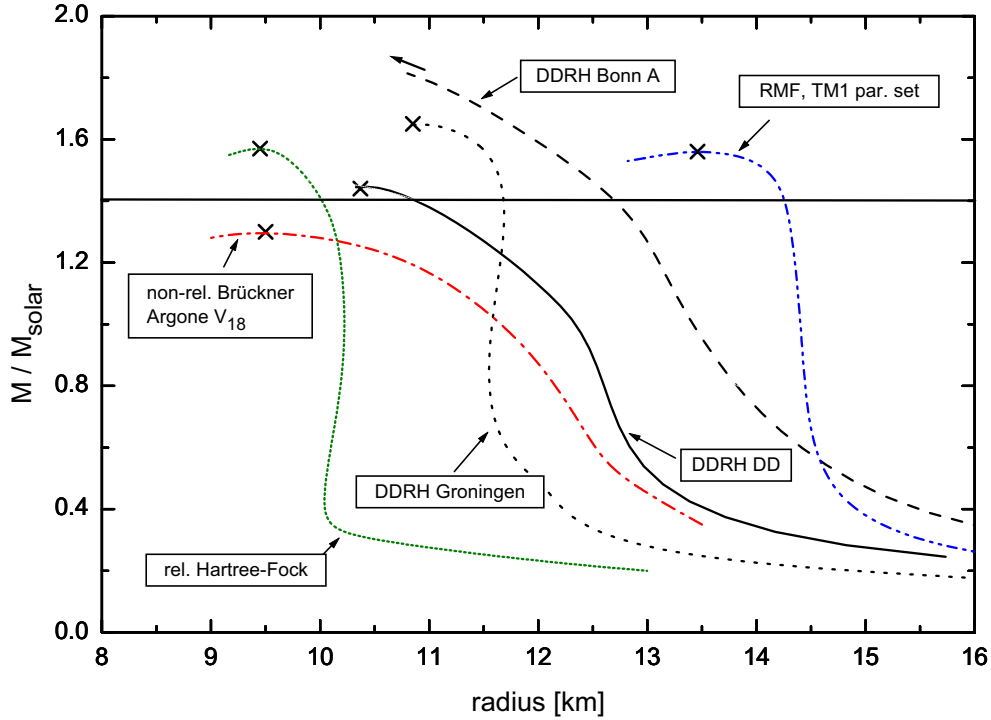
**Tab. 9.3:** Phänomenologische Dichteabhängigkeit; analog Tabelle 9.1

den. Massen um  $\sim 1.3M_\odot$  können jedoch noch nicht als scharfes Ausschlusskriterium verwendet werden, da es sich bei den meisten beobachteten Neutronensternen um rotierende Systeme handelt. Die Berücksichtigung der Rotation erhöht jedoch die maximale Masse des Stern um 10-15% [138]. In Anbetracht der weichen DB–EoS bei niedrigen Dichten ist der Wert von  $\sim 1.8M_\odot$  für die Bonn A Parametrisierung wahrscheinlich zu hoch. Verursacht wird dies durch die instabile Extrapolation der dichteabhängigen Vertizes zu hohen Dichten. Die Ergebnisse der Groningen und DD Parametrisierungen sind deshalb als realistischer einzuschätzen. Einen systematischen Vergleich verschiedener relativistischer und nicht-relativistischer Modelle sowie eine Diskussion der Eigenschaften von Neutronensternen findet man in [127].

### 9.3 Zusammenfassung

In diesem Teil der Arbeit wurde die dichteabhängige relativistische Hadronenfeldtheorie zur Beschreibung von Hyperonen auf das komplette Oktett der  $SU(3)_f$  Baryonen erweitert. Da Dirac–Brückner–Rechnungen für seltsame Kernmaterie noch nicht verfügbar sind, wurde auf die dichteabhängigen Parametrisierungen der Groningen und Bonn A NN–Potentiale aus Kernmaterie zurückgegriffen. Daraus wurde die Dichteabhängigkeit der Meson–Hyperon–Vertizes bestimmt, während ihre Stärke an Ergebnisse aus Hyperkernen angepasst wurde. Die Struktur der DB–Wechselwirkung weist darauf hin, dass das Verhältnis  $R_{\alpha Y}$  der in–Medium Hyperon- und Nukleon–Vertizes und –Selbstenergien hauptsächlich durch das Verhältnis der entsprechenden freien Kopplungskonstanten bestimmt wird.

Es zeigt sich, dass die Erweiterung der Dichteabhängigkeit von Kernmaterie auf seltsame Materie nicht eindeutig ist. Wir haben zwei unterschiedliche Modelle zur Beschreibung der Abhängigkeit der Vertizes von der umgebenden Baryonenmaterie entwickelt. In Modell 1 hängen alle Vertizes von der Gesamtbaryonendichte ab und werden nicht von der Flavor- bzw. Strangeness–Asymmetrie der Materie verändert. Dadurch bleibt die relative Stärke der Nukleonen- und Hyperonen–Vertizes konstant, ein Verhalten, dass auch bei RMF–Modellen mit konstanten Kopplungen gegeben ist. Eine extreme Annahme ist in diesem Modell jedoch, dass die Dichteabhängigkeit der Vertizes von allen Baryonen gleich stark beeinflusst wird. In erster Ordnung sollten jedoch die Hyperonen verschiedener  $SU(3)_f$ –Multipletts unabhängig voneinander sein. Deshalb hängen in Model 2 die Vertizes nur von der Dichte der Baryonen innerhalb des zugehörigen Multipletts ab. Dieses Modell ist für leicht asymmetrische Systeme reali-



**Abb. 9.6:** Vergleich der Masse-Radius-Relationen aus verschiedenen Rechnungen: Groningen, Bonn A und DD Parametrisierung im DDRH Modell, RMF Modell mit TM1 Parametrisierung [136], nicht-relativistisches Brückner Modell mit dem Argonne  $V_{18}$  Potential [120] und relativistisches Hartree-Fock Modell [138]. Man erkennt, dass die dichteabhängigen Parametrisierungen im Vergleich zur RMF-Rechnung kleinerer Radien für einen typischen Neutronstern mit  $1.4M_{\odot}$  vorhersagen. Die Kreuze markieren die maximalen Neutronensternmassen.

stischer, vernachlässigt jedoch den bei starker Asymmetrie vorhandenen Einfluss der anderen Baryonen-Multipletts. Es zeigt sich auch, dass in Modell 2 die Eigenschaften der Parametrisierung bei niedrigen Dichten sehr wichtig werden. Diese können jedoch aufgrund unsicherer DB-Ergebnisse nicht zuverlässig festgelegt werden. Es ist anzunehmen, dass eine realistische Dichteabhängigkeit, die nur aus DB-Rechnungen für das komplette  $SU(3)_f$ -Oktett bestimmt werden kann, eine Mischung aus Modell 1 und 2 darstellen muss. Eine Berechnung von  $NA$ -Materie zeigt, dass Modell 1 zu wesentlich weicheren Zustandsgleichungen führt. Die Unterschiede zwischen beiden Modellen verschwinden jedoch bei sehr hohen Dichten und zunehmenden Strangeness-Anteil  $f_S$ . Im Grenzfall  $f_S = 1$  sind beide Modelle identisch.

Die Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$  der vektoriellen Vertizes wurden aus  $SU(6)$ -Symmetrieüberlegungen abgeleitet, während die der skalaren Vertizes durch Anpassung an die Potentiale von Hyperonen in Hyperkernen bestimmt wurden. Mikroskopische Berechnungen des  $\sigma\Lambda$  Vertex zeigen jedoch eine starke Abweichung vom Quark-Modell Wert. Es wurden deshalb Rechnungen mit dem aus  $NA$  T-Matrix-Rechnungen extrahierten Wert von  $R_{\sigma\Lambda} = 0.49$  (Skalierungssatz  $R_m$ ) und dem  $SU(6)$ -Wert  $R_{\omega\Lambda} = 2/3$

(Skalierungssatz  $R_q$ ) durchgeführt. Obwohl die restlichen Skalierungsfaktoren an das gleiche experimentelle  $\Lambda$ -Potential angepasst wurden, zeigen sich starke Unterschiede in den Zustandsgleichungen. Der kleinere mikroskopische Wert führt zu einer wesentlich weicheren EoS von seltsamer Kernmaterie.

Mit der im schwachen  $\beta$ -Gleichgewicht berechneten Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie wurde die TOV-Gleichung gelöst. Es zeigt sich, dass die beiden unterschiedliche Wahlen der Skalierungsfaktoren die maximalen Neutronensternmasse um 10-15% verändern. Dieser große Unterschied wird zum Teil durch die Dichteabhängigkeit der Wechselwirkungen hervorgerufen, sollte jedoch auch in RMF-Rechnungen mit dichteunabhängigen Kopplungen bemerkbar sein. Da jedoch keine mikroskopisch bestimmten Werte für die  $\Sigma$ - und  $\Xi$ -Werte erhältlich sind, bleiben Rechnungen für das komplette Baryonen-Oktett zur Zeit auf die Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$  aus der SU(6)-Symmetrie beschränkt. Man sollte jedoch durch den Vergleich mit den Eigenschaften von Neutronensternen untersuchen, ob diese Werte realistisch sind und obere und untere Grenzen für die  $R_{\alpha Y}$  bestimmen [139, 140].

Die Untersuchung von Neutronensternen favorisiert Modell 1 als Wahl zur Berechnung stark asymmetrische Systeme bei hohen Dichten. Modell 2 sagt zu hohe Massen und eine Unterdrückung der Hyperonen in Neutronensternen voraus. Die Ergebnisse von Modell 1 sind dagegen in sehr guter Übereinstimmung mit anderen Rechnungen. Alle untersuchten dichteabhängigen Wechselwirkungen sagen für Sterne mit Massen oberhalb  $1.4M_{\odot}$  Radien von 10 – 13 km voraus, was mit nicht-relativistische Brückner-Rechnungen übereinstimmt. Diese Ergebnisse sind in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten als Rechnungen mit phänomenologischen RMF-Wechselwirkungen, die gewöhnlich größeren Radien finden. Unsere maximalen Massen von  $M_{\max} = 1.65M_{\odot}$  (Groningen) und  $M_{\max} = 1.44M_{\odot}$  (DD) werden von anderen RMF-Rechnungen bestätigt und liegen etwas höher als Ergebnisse von Brückner-Rechnungen.



# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden exotische Kerne und Neutronensterne im Rahmen der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie (DDRH) untersucht. Die dafür verwendeten Zweiteilchenwechselwirkungen basieren auf realistischen Nukleon–Nukleon–Potentialen, aus denen in Dirac–Brückner–Hartree–Fock (DBHF) Rechnungen eine mikroskopische dichteabhängige Wechselwirkung im nuklearen Medium bestimmt wurde. Speziell wurden die Eigenschaften des Groningen und des Bonn A NN–Potentials und ihrer Parametrisierungen im Medium untersucht.

Im Teil 1 der Arbeit wurde gezeigt, wie sich die Ergebnisse aus DBHF–Rechnungen in der relativistischen Hartree–Theorie verwenden lassen. Folgende neue Aspekte wurden untersucht:

- **Impulsabhängigkeit der Selbstenergien**

Die bei einer gegebenen Baryondichte  $\rho(k_F)$  berechneten DBHF–Selbstenergien  $\Sigma_{\text{DBHF}}(k, k_F)$  sind im allgemeinen impulsabhängig. Die Impulsabhängigkeit (und Zustandsabhängigkeit) resultiert dabei aus der Austauschamplitude der NN–Wechselwirkung. Zur Vereinfachung der DB–Rechnungen wird die Impulsabhängigkeit jedoch oft vernachlässigt und die Selbstenergien werden an der Fermikante  $k = k_F$  extrahiert.

Durch Projektion der DBHF–Selbstenergien auf die effektiven dichteabhängigen Meson–Nukleon–Kopplungsfunktionale der DDRH–Lagrangedichte ist es möglich, die DB  $G$ –Matrix in Hartree–Näherung zu parametrisieren. Es wurde gezeigt, dass im Gegensatz zu früheren Ansätzen die Identifizierung der Hartree– mit den DB–Selbstenergien über die makroskopische Bindungsenergie durchgeführt werden muss. Dieses Vorgehen stellt die korrekte Behandlung der aus der Dichteabhängigkeit der Vertizes resultierenden Rearrangementselbstenergien sicher.

Am Beispiel des Groningen NN–Potentials wurde gezeigt, dass es unter Vernachlässigung der Impulsabhängigkeit der Selbstenergien nicht möglich ist, in Hartree–Näherung die DB–Zustandsgleichung (EoS) zu reproduzieren. Durch Mittelung der potentiellen Energie kann die Impulsabhängigkeit effektiv parametrisiert und durch impulskorrigierte Kopplungen beschrieben werden. Dies erlaubt die Reproduktion der DB–EoS mit hoher Genauigkeit.

- **Dichteabhängigkeit der Isektorwechselwirkung**

Durch die Verwendung von in asymmetrischer Kernmaterie bestimmten Selbstenergien war es möglich, die Isektorwechselwirkung durch dichteabhängige Vertizes zu parametrisieren. Dies wurde für das Groningen NN–Potential

durchgeführt. Von entscheidender Bedeutung ist die Berücksichtigung des skalaren Isovektor-Mesons  $\delta$ , ohne welches eine konsistente Beschreibung der DB-Ergebnisse nicht erreichbar ist.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Vertizes in hervorragender Näherung als unabhängig von der Asymmetrie des Systems angenommen werden können. Zur Parametrisierung wurde eine rationale Funktion verwendet, die ein stabiles Verhalten der Vertizes sowohl bei sehr niedrigen als auch bei hohen Dichten sicherstellt. Dadurch war es möglich, die DB-EoS für alle betrachteten Asymmetrieverhältnisse und für reine Neutronenmaterie akkurat zu beschreiben.

Die in Kernmaterie bestimmte dichteabhängige Wechselwirkung wurde in Teil 2 der Arbeit in Hartree-Näherung zur Beschreibung endlicher Kerne verwendet. Untersucht wurden die Eigenschaften der in Teil 1 bestimmten Parametrisierung des Groningen NN-Potentials und einer Parametrisierung des Bonn A NN-Potentials. Von besonderem Interesse waren dabei:

- **Systematische Untersuchung stabiler Kerne**

Die Groningen und die Bonn A Parametrisierung erlauben eine gute Beschreibung endlicher Kerne. Dieses Ergebnis ist sehr zufriedenstellend, da beide Parametrisierungen direkt aus mikroskopischen Wechselwirkungen abgeleitet wurden und für endliche Kerne keine freien Parameter besitzen. Die Bonn A Parametrisierung beschreibt die experimentellen Ergebnisse etwas besser, was sich auf die besseren Sättigungseigenschaften des NN-Potentials in Kernmaterie zurückführen lässt.

Die Impulskorrektur der Vertizes führt zu einer verbesserten Beschreibung endlicher Kerne. Eine Anpassung der Korrekturfaktoren  $\zeta_\alpha$  an endliche Kerne verbessert die Ergebnisse weiter, muss jedoch als phänomenologische Korrektur interpretiert werden. Die Bindungsenergien reagieren sehr empfindlich auf kleine Änderung der  $\zeta_\alpha$ . Die Impulskorrektur führt nur zu einer Verschiebung der Kurven für die Bindungsenergien und Ladungsradien, die für alle betrachteten Isotope etwa gleich stark ist. Dieses Ergebnis ist sehr befriedigend, da es zeigt, dass die Impulskorrektur die Ungenauigkeiten bei der Extraktion der Selbstenergien korrigieren kann, aber die Eigenschaften der Wechselwirkung, die allein durch die Dichteabhängigkeit bestimmt werden, weitestgehend unverändert lässt.

- **Einfluss des  $\delta$ -Mesons**

Das in der Groningen Parametrisierung verwendete  $\delta$ -Meson hebt die Isospinunabhängigkeit der effektiven Masse auf und führt so zu unterschiedlichen effektiven Massen für Protonen und Neutronen, die sich im Kerninnern um bis zu 20% unterscheiden können. Das isovektorielle Spin-Bahn-Potential hängt von der Summe der Isovektor-Mesonen  $\delta$  und  $\rho$  ab und ist im Vergleich zu Parametrisierungen, die nur ein effektives  $\rho$ -Meson enthalten, stark erhöht. Es ließ sich jedoch kein systematisches Verhalten in der Spin-Bahn-Aufspaltung von Spiegelkernen beobachten. Verbesserte experimentelle Daten sind hierzu notwendig.

Im Vergleich zu experimentellen Daten und phänomenologischen Wechselwirkungen besitzt die Groningen Parametrisierung eine etwas zu starke, die Bonn

A Parametrisierung eine zu schwache Spin–Bahn–Wechselwirkung und Aufspaltung.

Ein Vergleich der Groningen und Bonn A Parametrisierungen zeigt, dass der Einfluss des  $\delta$ -Mesons auf die effektive Stärke der Isektorwechselwirkung gering ist. Beide Wechselwirkungen liefern vergleichbare Ergebnisse, ihre Isektorwechselwirkung ist zu schwach. Die dichteabhängigen Kopplungen der  $\delta$ - und  $\rho$ -Mesonen der Groningen Wechselwirkung sind im Vergleich zur konstanten  $\rho$ -Kopplung der Bonn A Parametrisierung etwa doppelt so stark. Die entsprechenden Potentiale der Mesonen kompensieren sich jedoch zu einem effektiven Isektorpotential, dessen Stärke ungefähr dem des  $\rho$ -Mesons der Bonn A Parametrisierung entspricht.

- **Eigenschaften der Ni- und Sn–Isotopenketten**

Die Beschreibung der exotischen Kerne der Ni- und Sn–Isotopenketten ist befriedigend. Insbesondere die mit der Bonn A Parametrisierung berechneten Radien stimmen sehr gut mit den Ergebnissen phänomenologischer Wechselwirkungen überein. Alle Parametrisierungen sagen dicke Neutronenhäute für Nickel–Isotope mit  $N \geq 52$  ( $^{80}\text{Ni}$ ) und Zinn–Isotopen mit  $N \geq 84$  ( $^{134}\text{Sn}$ ) voraus, was in Übereinstimmung mit anderen Rechnungen ist.

Die Separationsenergien und Schalenabschlüsse werden korrekt beschreiben. Es zeigt sich jedoch, dass aufgrund der zu schwachen (Bonn A) bzw. zu starken (Groningen) Spin–Bahn–Wechselwirkung der dichteabhängigen Wechselwirkungen die Schalenabschlüsse zum Teil zu stark bzw. zu schwach ausgeprägt sind. Der Einfluss der Impulskorrektur auf die Separationsenergien und die Bildung von Neutronenhäuten ist vernachlässigbar.

Eine simultane Beschreibung neutronenarmer und neutronenreicher Isotope ist mit beiden Wechselwirkungen nur bedingt möglich. Ein Vergleich mit den Koeffizienten der semiempirischen Massenformel zeigt, dass die Isektorwechselwirkung in endlichen Kernen etwas zu schwach ist. Beim Groningen Potential beobachtet man zusätzlich eine zu große Oberflächenenergie, was die systematische Unterschätzung der Bindungsenergien erklärt.

Eine Erweiterung der DDRH auf das Oktett der  $SU(3)_f$ -Baryonen sowie die Beschreibung von Neutronensternmaterie wurden in Teil 3 diskutiert. Da Dirac–Brückner–Rechnungen für seltsame Kernmaterie noch nicht durchführbar sind, musste zur Bestimmung der Hyperon–Meson–Vertizes bzw. der YN- und YY–Wechselwirkung ein anderes Vorgehen gewählt werden. Untersucht wurden die folgenden Aspekte:

- **Dichteabhängigkeit der Hyperon–Meson–Vertizes**

Die Erweiterung der Dichteabhängigkeit von Kernmaterie auf seltsame Materie ist nicht eindeutig. Es wurden deshalb zwei verschiedene Modellannahmen untersucht. In Modell 1 hängen alle Vertizes von der gleichen Dichte, der Gesamtdichte aller Baryonen ab, während in Modell 2 die Vertizes nur von der Dichte der Baryonen innerhalb des zugehörigen Multipletts abhängen. Die Parametrisierung der Vertizes wurde dabei aus den Ergebnissen für Kernmaterie übernommen. Modell 1 führt bei niedrigen Dichten zu wesentlich weicheren Zustandgleichungen.

Beide Modelle sind, in Abhängigkeit von der Flavor-Asymmetrie des Systems, unterschiedlich realistisch, jedoch im Grenzfall reiner Systeme identisch. Dies erlaubt eine systematische Untersuchung der möglichen Dichteabhängigkeit einer aus DB-Rechnungen mit dem kompletten Baryonen-Oktett bestimmten Wechselwirkung, die eine Mischung aus Modell 1 und 2 darstellen wird.

- **Einfluss der Skalierungsfaktoren  $R_{\alpha Y}$**

Die Struktur der DB-Wechselwirkung weist darauf hin, dass das Verhältnis  $R_{\alpha Y}$  der in-Medium Hyperon- und Nukleon-Vertizes und -Selbstenergien hauptsächlich durch das Verhältnis der entsprechenden freien Kopplungskonstanten bestimmt wird. Auch hier wurden zwei unterschiedlich Ansätze untersucht. Zum einen wurden die  $R_{\alpha Y}$  aus SU(6)-Symmetrie-Überlegungen bestimmt, andererseits mikroskopische Werte aus NA T-Matrix-Rechnungen genommen.

Obwohl die Stärke der Wechselwirkung an die aus Hyperkernen extrahierte Potentialtiefe angepasst wurde, liefern beide Ansätze unterschiedliche Ergebnisse, wobei der mikroskopische Wert zu einer weicheren EoS führt. Dieses Verhalten wurde auch in Hartree-Rechnungen mit konstanten Kopplungen beobachtet, dort aber nicht systematisch untersucht.

- **Eigenschaften von Neutronensternen**

Die Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie wurde im schwachen  $\beta$ -Gleichgewicht gelöst. Aufgrund der Dichteabhängigkeit der Vertizes ist die Berechnung der seltsamen Kernmaterie wesentlich aufwendiger als im Fall von dichteunabhängigen Kopplungen.

Die Eigenschaften von Neutronensternen hängen stark von der Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung und ihrer Extrapolation zu hohen Dichten ab. Ein Vergleich mit experimentellen Daten und Ergebnissen aus Rechnungen anderer Modelle favorisiert Modell 1 zur Beschreibung stark asymmetrische Systeme bei hohen Dichten. Berechnete maximale Massen sind in sehr guter Übereinstimmung mit anderen Modellen. Die berechneten Neutronensternradien sind etwas größer als die aus nicht-relativistischen Brückner-Rechnungen und in besserer Übereinstimmung mit experimentellen Daten als phänomenologischen RMF-Wechselwirkungen, die gewöhnlich größere Radien finden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Parametrisierungen der Groningen und Bonn A NN-Potentiale in Anbetracht ihres mikroskopischen Charakters eine gute Beschreibung exotischer Systeme erlauben. Die DDRH lässt sich sowohl für exotische Kerne mit starker Isospinasyymetrie als auch für Neutronensterne bei hohen Dichten und starker Flavorasyymetrie erfolgreich einsetzen und wurde damit in dieser Arbeit umfassend angewendet.

Es bleibt natürlich noch Raum für Verbesserungen. Es zeigt sich, dass alle Ergebnisse sehr sensitiv auf kleine Änderungen in den Kopplungskonstanten sind. Eine präzise Parametrisierung der DB-Ergebnisse ist deshalb sehr wichtig. Wünschenswert wären verbesserte DB-Rechnungen für asymmetrische Kernmaterie, die die volle Impulsstruktur der NN-Wechselwirkung inklusiver negativer Energieeigenwerte berücksichtigen.



Ein weiteres Problem sind die numerischen Probleme von DB-Rechnungen bei Dichten  $\rho \ll \rho_0$  und starker Asymmetrie. Dies zeigt sich in unseren Anwendungen unter anderem in der unsicheren Extrapolation der Vertizes zu sehr geringen Dichten, die für Modell 2 bei der Berechnung von Neutronensternen problematisch ist. Genauso sind die dichteabhängigen Vertizes im Isevektorkanal der Wechselwirkung nicht sehr sicher bestimmt, was sich z.B. am Anstieg der  $\delta$ -Kopplungsstärke für Dichten  $\rho > \rho_0$  zeigt. Eine verbesserte Isevektorwechselwirkung ist insbesondere für exotische Kerne wichtig. Hier sind jedoch auch verbesserte experimentelle Daten für Bindungsenergien, Ladungsradien und Einteilchenenergien für eine weitergehende Untersuchung notwendig.

Dirac-Brückner-Rechnungen, die über die Leiter-Näherung hinausgehen und Diagramme höherer Ordnung und Dreikörperkräfte berücksichtigen, sollten eine Verbesserung der Sättigungseigenschaften erlauben. Die DDRH ermöglicht dank ihrer dichteabhängigen Vertizes die implizite Parametrisierung solcher Effekte. Für die verbesserte Beschreibung der Oberfläche endlicher Kerne ist hier der Dichtebereich unterhalb  $0.5\rho_0$  entscheidend.

Die größte Unsicherheit besteht zur Zeit noch in der Hyperon-Wechselwirkung. Bevor hier endgültige Aussagen getroffen werden können, werden detaillierte experimentelle Ergebnisse aus der YN-Streuung und für Hyperkerne benötigt. Nur DB-Rechnungen für das volle Baryonen-Oktett mit realistischen YN-Potentialen können zuverlässige Aussagen über die Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung und ihre Stärke liefern. Solange diese nicht durchführbar sind, bleiben wir auf unseren Ansatz für die Vertizes beschränkt.

Für Neutronensterne ist die Extrapolation zu hohen Dichten sehr wichtig. Unter diesen Bedingungen ist jedoch noch keine zuverlässige Aussage über das Verhalten der NN-Wechselwirkung im Medium möglich – ein Problem, welches in allen Modellen vorhanden ist. Auch hier wären DB-Ergebnisse für höheren Dichten hilfreich. Genauere Messungen von Neutronensternradien und Massen könnten eine zusätzlich Einschränkung der Eigenschaften der Wechselwirkungen bei hohen Dichten ermöglichen.



# Anhang



# Anhang A

## Relativistische Notation

In dieser Arbeit wird die Metrik von [56, 57] verwendet:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Es gilt das natürliche Einheitensystem mit  $\hbar = c = 1$ . Vierervektoren werden im allgemeinen als  $x$  dargestellt, Dreivektoren  $\mathbf{x}$  sind durch Fettdruck und ihr Betrag durch  $x$  gekennzeichnet. Kontraktionen aus  $\gamma_\mu$  und einem Vierervektor werden durch  $\gamma_\mu a^\mu = \not{a}$  dargestellt. Damit sind ko- und kontravariante Vektoren und die partiellen Ableitungen gegeben durch:

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\nabla), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla) \quad (\text{A.3})$$

Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren. Damit ist das Viererskalarprodukt definiert als:

$$x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \quad (\text{A.4})$$

Die  $\gamma$ -Matrizen in der Dirac-Gleichung und in der Lagrangedichte erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

und hängen mit den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Matrizen durch  $\boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}$  und  $\gamma_0 = \beta$  zusammen.  $\gamma_0$  ist hermitesch und die  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind antihermitesch. Weitere Kombinationen sind:

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Die in dieser Arbeit verwendete explizite Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen lautet [57]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

wobei  $\mathbb{1}$  die 2x2 Einheitsmatrix und  $\boldsymbol{\sigma}$  die sogenannten Pauli-Spinmatrizen sind. Diese sind definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Wichtige Eigenschaften dieser Matrizen sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Abschließend werden noch einige nützliche Relationen der  $\gamma$ -Matrizen bei hermitescher Konjugation bzw. Kontraktion angegeben:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^\dagger &= \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \\ \gamma_5^\dagger &= -\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = \gamma_5 \\ (\sigma_{\mu\nu})^\dagger &= \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} \gamma_0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu &= a_\mu b^\mu - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \\ \gamma_\lambda \gamma^\lambda &= 4 \\ \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\lambda &= -2\gamma_\mu \\ \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda &= 4g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

# Anhang B

## Dirac-Spinoren

### B.1 Unendliche Kernmaterie

Im Falle der freien Dirac-Gleichung

$$[\gamma_\mu k^\mu - m] \Psi(x) = [\not{k} - m] \Psi(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

kann die allgemeine Lösung als Entwicklung nach ebenen Wellen dargestellt werden [56, 57],

$$\Psi(x) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_k}} \left[ b(k, s) u(k, s) e^{-ikx} + d^\dagger(k, s) v(k, s) e^{ikx} \right], \quad (\text{B.2})$$

wobei die Spinoren  $u(k, s)$  und  $v(k, s)$  Eigenzustände mit positiver bzw. negativer Energie beschreiben und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu k^\mu - m] u(k, s) &= 0 \\ [\gamma_\mu k^\mu + m] v(k, s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Konjugierte Spinoren sind definiert als

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^\dagger \gamma_0 \\ \bar{v} &= v^\dagger \gamma_0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

und erfüllen die Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{u}(k, s') u(k, s) &= \delta_{ss'} = -\bar{v}(k, s') v(k, s) \\ u^\dagger(k, s') u(k, s) &= \frac{E_k}{m} = v^\dagger(k, s') v(k, s). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ihre explizite Form ergibt sich damit zu

$$u(k, s) = \sqrt{\frac{E_k + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}}{E_k + m} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (\text{B.6})$$

mit der Definition  $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  und den Pauli-Spinoren

$$\chi_{s=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{s=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

In unendlicher Kernmaterie lassen sich die stationären Lösungen

$$u^*(k, s) = \begin{pmatrix} u_n^*(k, s) \\ u_p^*(k, s) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^*(k, s) = \begin{pmatrix} v_n^*(k, s) \\ v_p^*(k, s) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

der modifizierten und nach Isospin separierten Dirac-Gleichung

$$[\gamma_\mu k_b^{*\mu} - m_b^*] u_b^*(k, s) = 0, \quad b = p, n \quad (\text{B.9})$$

explizit angeben. Sie unterscheiden sich von der Lösung der freien Dirac-Gleichung nur dadurch, dass die freien Größen  $E$ ,  $m$ , und  $k$  durch die in Kapitel 3 definierten mediumabhängigen Größen  $E^*$ ,  $m^*$ , und  $k^*$  ersetzt werden müssen, und erfüllen die gleichen Normierungsbedingungen. Man findet:

$$u_b^*(k, s) = \sqrt{\frac{E_b^* + m_b^*}{2m_b^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}_b^*}{E_b^* + m_b^*} \end{pmatrix} \chi_s. \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Endliche Kerne

Die stationäre Lösung der Dirac-Gleichung für endliche Systeme

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma^\mu) - (M - \Sigma^s)] \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

lässt sich für Kerne nicht analytisch bestimmen. Bei rotationssymmetrischen Systemen kann jedoch die Winkelabhängigkeit von der Radialabhängigkeit der Wellenfunktion separiert werden. Letztere muß jedoch numerisch bestimmt werden. Für sphärisch symmetrische Kerne, die ausschließlich in dieser Arbeit betrachtet werden, wird die Dirac-Gleichung durch folgenden Ansatz gelöst:

$$\psi_i^{\tau_3}(\mathbf{r}, s) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{nj}^{\tau_3}(r) \mathcal{Y}_{jlm}(\theta, \phi, s) \\ iG_{nj}^{\tau_3}(r) \mathcal{Y}_{j\bar{l}m}(\theta, \phi, s) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Dieser Spinor (der Index  $i = \{n, j, l, m\}$  unterscheidet die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Lösungen) wird charakterisiert durch die Hauptquantenzahl  $n$ , den Drehimpuls  $j$ , seine  $z$ -Projektion  $m$  und den Iso-Spin  $\tau_3 = \pm \frac{1}{2}$  für Neutronen  $n$  bzw. Protonen  $p$ . Der Bahndrehimpuls  $l$  und  $\bar{l}$  werden bestimmt durch  $j$  und die Parität  $\pi$ :

$$l = \begin{cases} j + \frac{1}{2} & \text{für } \pi = (-1)^{j+\frac{1}{2}} \\ j - \frac{1}{2} & \text{für } \pi = (-1)^{j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{l} = \begin{cases} j - \frac{1}{2} & \text{für } \pi = (-1)^{j+\frac{1}{2}} \\ j + \frac{1}{2} & \text{für } \pi = (-1)^{j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$



Die Spin-Wellenfunktion  $\mathcal{Y}_{jlm}(\theta, \phi, s)$  ist das Tensorprodukt aus Kugelflächenfunktion  $Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$  und dem zweikomponentigen Pauli-Spinor  $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$  und ist definiert als

$$\mathcal{Y}_{jlm}(\theta, \phi, s) = \sum_{m_s, m_l} Y_{l,m_l}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2}m_s} \left\langle l m_l \frac{1}{2} m_s \middle| j m \right\rangle, \quad (\text{B.15})$$

wobei die Funktionen durch die entsprechenden Clebsch–Gordon–Koeffizienten gekoppelt werden. Damit ergibt sich für die Normierung des Dirac-Spinors

$$\frac{4\pi}{2j_i + 1} \sum_{m_i} \int d^3r \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr \left[ G_i^2(r) + F_i^2(r) \right] = 1, \quad (\text{B.16})$$

wobei folgende Relation benutzt wurde:

$$\sum_m \mathcal{Y}_{jlm}^*(\theta, \phi, s) \mathcal{Y}_{jlm}(\theta, \phi, s) = \frac{2j + 1}{4\pi} \quad (\text{B.17})$$

Es ist nützlich, eine einzige Drehimpuls–Quantenzahl  $\kappa(j, l)$  als Eigenwert des Operators  $(1 + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{L}})$  zu definieren. Man findet [141]

$$(1 + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{L}}) \mathcal{Y}_{\kappa m} = -\kappa \mathcal{Y}_{\kappa m}, \quad (\text{B.18})$$

wobei  $\kappa$  als  $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$  für  $j = l \mp \frac{1}{2}$  definiert ist. Dies lässt sich auch als  $\kappa = \frac{1}{4} \frac{2j+1}{l-j}$  schreiben. Man findet sofort  $2j + 1 = 2|\kappa|$ .

Damit lässt sich der in der Dirac–Gleichung auftauchende Operator  $\boldsymbol{\alpha} \nabla$  umschreiben als

$$\boldsymbol{\alpha} \nabla = \alpha_r \left( \partial_r - \frac{1}{r} (1 + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{L}}) \right) = \alpha_r \left( \partial_r - \frac{\kappa}{r} \right), \quad (\text{B.19})$$

wobei  $p_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$  und  $\alpha_r = \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{r}}$  jeweils die Komponenten in radialer Richtung sind.



# Anhang C

## Energie–Impuls–Erhaltung

In einer dichteabhängigen relativistischen Feldtheorie ist die korrekte Behandlung der Rearrangement–Terme von entscheidender Bedeutung für die physikalische und mathematische Konsistenz der Theorie. So muß gewährleistet sein, dass Energie und Impuls erhalten sind. In relativistischer Formulierung bedeutet dies, dass die Divergenz des Energie–Impuls–Tensors  $T^{\mu\nu}$  verschwindet, also

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Dieser wird in den folgenden Überlegungen der Übersichtlichkeit wegen nur für Nukleonen betrachtet. Die Erweiterung auf das  $SU(3)_f$  Baryonen–Oktett führt nur zu einer zusätzlichen Summe über die Ableitungsterme (wie in Kapitel 7), die Vorgehensweise ist jedoch identisch. Der Energie–Impuls–Tensors ist definiert als

$$T^{\mu\nu} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_j)} \partial^\nu \phi_j - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \phi_j = \bar{\Psi}, \Psi, \Phi_i, A^{(\kappa)\lambda} \quad (\text{C.2})$$

mit  $i = \sigma, \delta$  und  $\kappa = \omega, \rho$ . Unter Berücksichtigung der Baryonenfeldgleichung Gl. (2.21) berechnet sich dieser mit der Lagrangedichte aus Kapitel 2 zu

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \bar{\Psi} \left[ \gamma_\lambda \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right] \Psi \\ &+ \sum_i \left( \partial^\mu \Phi_i \partial^\nu \Phi_i - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \partial_\lambda \Phi_i \partial^\lambda \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2 \right] \right) \\ &+ \sum_\kappa \left( \partial^\nu A_\lambda^{(\kappa)} F^{(\kappa)\lambda\mu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ -F_{\lambda\rho}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\lambda\rho} + m_\kappa^2 A_\lambda^{(\kappa)} A^{(\kappa)\lambda} \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die Divergenz des kinetischen Terms aus Gl. (C.3) wird mit Hilfe der Dirac–Gleichung und der entsprechenden Gleichung für das adjungierte Baryonenfeld

$$\left[ \gamma_\mu \left( i \overleftrightarrow{\partial}^\mu - \hat{\Sigma}^{\mu(0)} - \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \right) - \left( M - \hat{\Sigma}^{s(0)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right) \right] \Psi = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{\Psi} \left[ \gamma_\mu \left( i \overleftarrow{\partial}^\mu + \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \right) + \left( M - \hat{\Sigma}^{s(0)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right) \right] = 0 \quad (\text{C.5})$$

berechnet. Man erhält damit

$$\partial_\mu \left( i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi \right) = \bar{\Psi} \left( \partial^\nu \left[ \gamma_\mu \left( \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \right) + \left( M - \hat{\Sigma}^{s(0)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right) \right] \right) \Psi. \quad (\text{C.6})$$

Die Ableitung des zweiten Terms aus Gl. (C.3), die die Rearrangementpotentiale enthält, wird in zwei Beiträge aufgespalten

$$\begin{aligned} -\partial_\mu g^{\mu\nu} \bar{\Psi} \left[ \gamma_\lambda \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right] \Psi = & - \bar{\Psi} \left( \partial^\nu \left[ \gamma_\lambda \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right] \right) \Psi \\ & - \left[ \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \gamma_\lambda \Psi \right) \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \Psi \right) \hat{\Sigma}^{s(r)} \right]. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Zusammengefaßt ergeben diese beiden Ausdrücke

$$\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \left( \partial^\nu \hat{\Sigma}^{\mu(0)} \right) - \bar{\Psi} \Psi \left( \partial^\nu \hat{\Sigma}^{s(0)} \right) - \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \gamma_\lambda \Psi \right) \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} + \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \Psi \right) \hat{\Sigma}^{s(r)}. \quad (C.8)$$

Die explizite Berechnung der Divergenz der Selbstenergien der beiden ersten Terme aus Gl. (C.8) ergibt für den VDD Fall

$$\begin{aligned} \partial^\nu \left[ \hat{\Sigma}_0^{\mu(0)} + \tau \hat{\Sigma}_3^{\mu(0)} \right] &= \partial^\nu \left[ \hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho}_0) A^{(\omega)\mu} + \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho}_0) \tau \mathbf{A}^{(\rho)\mu} \right] \\ &= \hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho}_0) \partial^\nu A^{(\omega)\mu} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} A^{(\omega)\mu} \hat{u}_\lambda \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \gamma^\lambda \Psi \right) \\ &+ \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho}_0) \partial^\nu \tau \mathbf{A}^{(\rho)\mu} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} \mathbf{A}^{(\rho)\mu} \hat{u}_\lambda \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \gamma^\lambda \tau \Psi \right) \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \partial^\nu \left[ \hat{\Sigma}_0^{s(0)} + \tau \hat{\Sigma}_3^{s(0)} \right] &= \partial^\nu \left[ \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}_0) \Phi_\sigma + \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}_0) \tau \Phi_\delta \right] \\ &= \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}_0) \partial^\nu \Phi_\sigma + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} \Phi_\sigma \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \Psi \right) \\ &+ \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}_0) \partial^\nu \tau \Phi_\delta + \frac{\partial \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}_0)}{\partial \hat{\rho}_0} \Phi_\delta \left( \partial^\nu \bar{\Psi} \tau \Psi \right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

Die Terme, die die Ableitungen der Vertizes enthalten, heben sich mit dem Term aus Gl. (C.8), der die Vektor-Rearrangementenergien enthält, auf und  $\hat{\Sigma}^{s(r)}$  verschwindet im VDD Fall nach Definition. Im SDD Fall verläuft die Berechnung analog, nur dass dann die Terme aus der Divergenz der skalaren Selbstenergien die skalaren Rearrangementenergien herausheben. Damit reduziert sich die Divergenz der beiden ersten Terme des Energie-Impuls-Tensors aus Gl. (C.3) zu

$$\hat{\Gamma}_\omega(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \partial^\nu A^{(\omega)\mu} + \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \gamma^\nu \tau \Psi \partial^\nu \mathbf{A}^{(\rho)\mu} - \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \Psi \partial^\nu \Phi_\sigma - \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho}_0) \bar{\Psi} \tau \Psi \partial^\nu \Phi_\delta \quad (C.11)$$

Man kann in einer einfachen, aber länglichen Rechnung unter Berücksichtigung der Mesonenfeldgleichungen (2.9-2.13) zeigen, dass sich diese Terme gerade mit der Divergenz der mesonischen Terme von  $T^{\mu\nu}$  herausheben. Daraus erkennt man sofort, dass die Energie-Impuls-Erhaltung erfüllt wird. Es ist offensichtlich, dass die Ableitungsterme der Vertizes aus Gl. (C.9) und (C.10) zurückbleiben würden, würde man nicht die Rearrangementselbstenergien in Gl. (C.8) berücksichtigen. Energie-Impuls-Erhaltung wäre dann nicht gegeben.

# Anhang D

## Thermodynamische Konsistenz

Thermodynamische Konsistenz bedeutet, dass die thermodynamische Definition des Druckes eines Systems mittels der Energiedichte identisch dem mechanischen Druck ist, den man aus dem Energie–Impuls–Tensor erhält, also ( $\rho$  ist die Baryonenvektordichte)

$$\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle T^{ii} \rangle. \quad (\text{D.1})$$

Wir beschränken uns auf den Fall der vektoriellen Dichteabhängigkeit (VDD), d. h. die Terme  $\hat{\Sigma}^{s(r)}$  sind identisch null, und betrachten das System in Hartree–Näherung. Auch hier werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Nukleonen betrachten. Die Erweiterung auf das  $SU(3)_f$  Baryonen–Oktett führt hier nur zu einer Summe über alle Baryonen (wie in Kapitel 7), die Vorgehensweise ist jedoch identisch. Der thermodynamische Druck  $P$  berechnet sich aus der Ableitung der Energiedichte  $\epsilon = \langle T^{00} \rangle$  als

$$P = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \epsilon - \epsilon \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} &= \rho \sum_{b=n,p} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right) \right] \\ &- \sum_{b=n,p} \left[ \frac{3}{4} E_{F_b} \rho_b - \frac{1}{4} m_b^* \rho_b^s - \frac{1}{2} \left( \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Die Ableitung des Integrals in Gl. (D.3) wirkt auf die obere Grenze des Integrals und auf die dichteabhängige effektive Masse  $m_b^*$ . Sie lässt sich in zwei Terme aufspalten:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{k_{F_b}}{3\rho} \frac{\partial}{\partial k_{F_b}} \int_{\Theta(k_{F_b})} d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} + \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\partial m_b^*}{\partial \rho} \int_{\Theta(k_{F_b})} d^3 k \frac{m_b^*}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}}} \\ &= \frac{\rho_b}{\rho} \sqrt{k_{F_b}^2 + m_b^{*2}} + \rho_b^s \frac{\partial m_b^*}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Die Ableitung der vektoriellen Energie in Gl. (D.3) ergibt unter Verwendung der Mesonenfeldgleichungen und der Definition der Selbstenergien

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{b=n,p} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho_b \Sigma_b^{0(0)} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} + \rho_3^2 \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \right) \\ &= \sum_{b=n,p} \frac{\rho_b}{\rho} \left( \Gamma_\omega A_0^{(\omega)} + \tau_b \Gamma_\rho A_0^{(\rho)} \right) + \rho A_0^{(\omega)} \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \rho} + \rho_3 A_0^{(\rho)} \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Während die ersten beiden Terme obiger Gleichung als die Vektorselbstenergie identifiziert werden können, liefern die letzten beiden exakt den Beitrag der Vektormesonen zur Rearrangementenergie. Man kann nun die Ableitung der effektiven Masse mit den Mesonenfeldgleichungen umschreiben als

$$\sum_{b=n,p} \rho_b^s \frac{\partial m_b^*}{\partial \rho} = - \sum_{b=n,p} \rho_b^s \frac{\partial \Sigma_b^s}{\partial \rho} = -\rho^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^s \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) - \rho_3^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho_3^s \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \right) \quad (\text{D.6})$$

Unter Verwendung der Relation

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (f^2 g^2) - f \frac{\partial}{\partial \rho} (f g^2) = -f^2 \frac{\partial}{\partial \rho} (g^2) \quad (\text{D.7})$$

vereinfacht sich damit die Summe aus Gl. (D.6) und der skalaren Energie aus Gl. (D.3) analog zu Gl. (D.4) zu

$$\sum_{b=n,p} \left[ \rho_b^s \frac{\partial m_b^*}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right) \right] = -\phi_\sigma \rho^s \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \rho} - \phi_\delta \rho_3^s \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial \rho}, \quad (\text{D.8})$$

was genau dem Beitrag der skalaren Mesonen zur Rearrangementenergie entspricht. Zusammenfassend erhält man mit den Ergebnissen aus Gl. (D.4), (D.5) und (D.8) die Beziehung

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \epsilon - \epsilon = \sum_{b=n,p} \left( E_{F_b} \rho_b + \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b \Sigma_b^{0(r)} \right) \quad (\text{D.9})$$

$$- \sum_{b=n,p} \left[ \frac{3}{4} E_{F_b} \rho_b - \frac{1}{4} m_b^* \rho_b^s - \frac{1}{2} \left( \rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right) \right], \quad (\text{D.10})$$

die nach Vereinfachung exakt der Definition von  $P$  aus dem Energie-Impuls-Tensor entspricht.

Die Berechnung des chemischen Potentials erfolgt entsprechend. Jedoch muss jetzt die Relation

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{b'}} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_{F_b}} d^3 k \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^{*2}} = \delta_{bb'} \sqrt{k_{F_b}^2 + m_b^{*2}} + \rho_b^s \frac{\partial m_b^*}{\partial \rho_{b'}} \quad (\text{D.11})$$

verwendet werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] R. B. Wiringa, R. A. Smith und T. L. Ainsworth,  
*Nucleon Nucleon Potentials With And Without Delta (1232) Degrees Of Freedom*,  
Phys. Rev. **C29**, 1207 (1984).
- [2] I. E. Lagaris und V. R. Pandharipande,  
*Phenomenological Two Nucleon Interaction Operator*,  
Nucl. Phys. **A359**, 331 (1981).
- [3] R. Machleidt,  
*The Meson Theory Of Nuclear Forces And Nuclear Structure*,  
Adv. Nucl. Phys. **19**, 189 (1989).
- [4] M. M. Nagels, T. A. Rijken und J. J. de Swart,  
*Low-Energy Nucleon-Nucleon Potential From Regge Pole Theory*,  
Phys. Rev. **D17**, 768 (1978).
- [5] P. Ring und P. Schuck,  
*The Nuclear Many-Body Problem*,  
(Springer Verlag, New York, 1980).
- [6] T. H. R. Skyrme,  
*The Effective Nuclear Potential*,  
Nucl. Phys. **9**, 615 (1959).
- [7] J. Decharge und D. Gogny,  
*Hartree-Fock-Bogolybov Calculations with the D1 Effective Interaction on Spherical Nuclei*,  
Phys. Rev. **C21** 1568 (1980).
- [8] J. D. Walecka,  
*A Theory Of Highly Condensed Matter*,  
Annals Phys. **83**, 491 (1974).
- [9] J. Boguta und A. R. Bodmer,  
*Relativistic Calculation Of Nuclear Matter And The Nuclear Surface*,  
Nucl. Phys. **A292**, 413 (1977).

- [10] B. D. Serot und J. D. Walecka,  
*The Relativistic Nuclear Many Body Problem*,  
Adv. Nucl. Phys. **16**, 1 (1986).
- [11] M. Gell-Mann  
*A schematic model of baryons and leptons*,  
Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [12] H. Muether und A. Polls,  
*Correlations derived from modern nucleon nucleon potentials*,  
Phys. Rev. **C61**, 014304 (2000).
- [13] P. G. Reinhard, M. Rufa, J. Maruhn, W. Greiner und J. Friedrich,  
*Nuclear Ground State Properties In A Relativistic Meson Field Theory*,  
Z. Phys. **A323**, 13 (1986).
- [14] Y. K. Gambhir, P. Ring und A. Thimet,  
*Relativistic Mean Field Theory For Finite Nuclei*,  
Annals Phys. **198**, 132 (1990).
- [15] A. R. Bodmer,  
*Relativistic mean field theory of nuclei with a vector meson selfinteraction*,  
Nucl. Phys. **A526**, 703 (1991).
- [16] G. A. Lalazissis, D. Vretenar, P. Ring,  
*Relativistic Hartree-Bogoliubov description of ground-state properties of Ni and Sn isotopes*  
Phys. Rev. **C57**, 2294 (1998).
- [17] Z. Patyk, A. Baran, J. F. Berger, J. Decharge, J. Dobaczewski, P. Ring und A. Sobiczewski,  
*Masses and radii of spherical nuclei calculated in various microscopic approaches*,  
Phys. Rev. **C59**, 704 (1999).
- [18] S. Mizutori, J. Dobaczewski, G. A. Lalazissis, W. Nazarewicz und P. G. Reinhard,  
*Nuclear Skins and Halos in the Mean-Field Theory*,  
Phys. Rev. **C61**, 044326 (2000).
- [19] P. G. Reinhard,  
*The nonlinearity of the scalar field in a relativistic mean-field theory of the nucleus*,  
Z. Phys. **A329**, 257 (1988).
- [20] P. G. Reinhard,  
*The Relativistic Mean Field Description Of Nuclei And Nuclear Dynamics*,  
Rept. Prog. Phys. **52**, 439 (1989).



- [21] K. A. Brückner,  
*Two-Body Forces and Nuclear Saturation. III. Details of the Structure of the Nucleus*,  
Phys. Rev. **97**, 1353 (1955).
- [22] B. D. Day,  
*Elements of the Brückner-Goldstone Theorie of Nuclear Matter*,  
Rev. Mod. Phys. **39**, 719 (1967).
- [23] J. P. Jeukenne, A. Lejeune und C. Mahaux,  
*Many Body Theory Of Nuclear Matter*,  
Phys. Rept. **25**, 83 (1976).
- [24] F. Coester, S. Cohen, B. D. Day und C. M. Vincent,  
*Variation in Nuclear-Matter Binding Energies with Phase-Shift-Equivalent Two-Body Potentials*,  
Phys. Rev. **C1**, 769 (1970).
- [25] P. Moller, J. R. Nix, W. D. Myers und W. J. Swiatecki,  
*Nuclear ground state masses and deformations*,  
At. Data Nucl. Data Tables **59**, 185 (1995).
- [26] M. R. Anastasio, L. S. Celenza, W. S. Pong und C. M. Shakin,  
*Relativistic Nuclear Structure Physics*,  
Phys. Rept. **100**, 327 (1983).
- [27] C. J. Horowitz und B. D. Serot,  
*The Relativistic Two Nucleon Problem In Nuclear Matter*,  
Nucl. Phys. **A464**, 613 (1987).
- [28] B. Ter Haar und R. Malfliet,  
*Nucleons, Mesons And Deltas In Nuclear Matter. A Relativistic Dirac-Bruckner Approach*,  
Phys. Rept. **149**, 207 (1987).
- [29] R. Brockmann und R. Machleidt,  
*Relativistic Nuclear Structure. 1: Nuclear Matter*,  
Phys. Rev. **C42**, 1965 (1990).
- [30] H. F. Boersma und R. Malfliet,  
*From nuclear matter to finite nuclei 1: Parametrization of the Dirac-Bruckner G matrix*,  
Phys. Rev. **C49**, 233 (1994).
- [31] H. Huber, F. Weber und M. K. Weigel  
*Symmetric and asymmetric nuclear matter in the relativistic approach*,  
Phys. Rev. **C51**, 1790 (1995).

- [32] F. de Jong und H. Lenske,  
*Asymmetric Nuclear Matter in the Relativistic Brueckner Hartree Fock approach*,  
Phys. Rev. **C57**, 3099 (1998).
- [33] H. F. Boersma und R. Malfliet,  
*From nuclear matter to finite nuclei 2: Relativistic theories for finite nuclei*,  
Phys. Rev. **C49**, 1495 (1994).
- [34] F. Hofmann und H. Lenske,  
*Hartree Fock Calculations in the Density Matrix Expansion Approach*,  
Phys. Rev. **C57**, 2281 (1998)
- [35] R. Brockmann, H. Toki,  
*Relativistic density-dependent Hartree approach for finite nuclei*,  
Phys. Rev. Lett. **68**, 3408 (1992).
- [36] S. Haddad, M. Weigel,  
*Finite nuclear systems in a relativistic extended Thomas-Fermi approach with density-dependent coupling parameters*,  
Phys. Rev. **C48**, 2740 (1993).
- [37] H. Lenske und C. Fuchs,  
*Rearrangement in the density dependent relativistic theory of nuclei*,  
Phys. Lett. **B345**, 355 (1995).
- [38] C. Fuchs, H. Lenske und H. H. Wolter,  
*Density dependent hadron field theory*,  
Phys. Rev. **C52**, 3043 (1995).
- [39] F. Ineichen, M. K. Weigel, D. Von-Eiff  
*Nuclear structure calculations in the density-dependent relativistic Hartree theory*,  
Phys. Rev. **C53**, 2158 (1996).
- [40] H. Shen, Y. Sugahara, H. Toki,  
*Relativistic mean field approach with density dependent couplings for finite nuclei*,  
Phys. Rev. **C55**, 1211 (1997).
- [41] M. L. Cescato, P. Ring,  
*Density dependent relativistic mean field theory in deformed nuclei*,  
Phys. Rev. **C57**, 134 (1998).
- [42] F. de Jong und H. Lenske,  
*Relativistic Brueckner-Hartree-Fock calculations with explicit intermediate negative energy states*,  
Phys. Rev. **C58**, 890 (1998)
- [43] R. Malfliet,  
*Relativistic Theory of Nuclear Matter and Finite Nuclei*,  
Prog. Part. Nucl. Phys. **21**, 207 (1988).

- [44] C. M. Keil, F. Hofmann und H. Lenske,  
*Density dependent hadron field theory for hypernuclei*,  
Phys. Rev. **C61**, 064309 (2000).
- [45] C. M. Keil,  
*Beschreibung von Hyperkernen mit der dichteabhängigen, relativistischen Feldtheorie*,  
Diplomarbeit, Gießen, 1999.
- [46] H. Lenske, C. M. Keil, F. Hofmann und S. Briganti  
*Dirac-Brueckner Approach to Hyperon Interactions and Nuclei*,  
Proceedings of the International Workshop on Hypernuclear Physics with Electromagnetic Probes (HYJLAB99), edited by L. Tang, Hampton, Virginia (1999).
- [47] L. Engvik, M. Hjorth-Jensen, E. Osnes, G. Bao und E. Ostgaard,  
*Asymmetric nuclear matter and neutron star properties*,  
Phys. Rev. Lett. **73**, 2650 (1994).
- [48] R. H. Thompson,  
*Three-Dimensional Bethe-Salpeter Equation Applied to the Nucleon-Nucleon Interaction*  
Phys. Rev. **D1**, 110 (1970).
- [49] C. Itzykson, J.-B. Zuber,  
*Quantum Field Theory*,  
(McGraw-Hill, Singapore, 1980).
- [50] J. A. McNeil, L. Ray und S. J. Wallace,  
*Impulse Approximation NN Amplitudes For Proton - Nucleus Interactions*,  
Phys. Rev. **C27**, 2123 (1983).
- [51] M. Fierz,  
*Zur Fermionischen Theorie des  $\beta$ -Zerfalls*  
Z. Phys. **104**, 553 (1937).
- [52] S. Ulrych und H. Muether,  
*Relativistic Structure of the Nucleon Self-Energy in Asymmetric Nuclei*,  
Phys. Rev. **C56**, 1789 (1997).
- [53] J. W. Negele,  
*The mean field theory of nuclear structure and dynamics*,  
Rev. Mod. Phys. **54**, 913 (1982).
- [54] C. J. Horowitz und B. D. Serot,  
*Properties Of Nuclear And Neutron Matter In A Relativistic Hartree-Fock Theory*,  
Nucl. Phys. **A399**, 529 (1983).

- [55] G. C. Wick,  
*The Evaluation Of The Collision Matrix*,  
Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
- [56] J. D. Bjorken, S. D. Drell,  
*Relativistische Quantenmechanik*,  
(BI-Wiss.-Verl. , Mannheim, 1990).
- [57] J. D. Bjorken, S. D. Drell,  
*Relativistische Quantenfeldtheorie*,  
(BI-Wiss.-Verl. , Mannheim, 1993).
- [58] N. M. Hugenholtz und L. van Hove,  
*A theorem on the single-particle energy in a Fermi gas with interaction*,  
Physica **24**, 363 (1958).
- [59] H. Muether, R. Machleidt und R. Brockmann,  
*Relativistic Nuclear Structure. 2: Finite Nuclei*,  
Phys. Rev. **C42**, 1981 (1990).
- [60] S. Typel und H. H. Wolter,  
*Relativistic mean field calculations with density dependent meson-nucleon coupling*,  
Nucl. Phys. **A656**, 331 (1999).
- [61] S. Gmuca,  
*Finite-nuclei calculations based on relativistic mean-field effective interactions*,  
Nucl. Phys. **A547**, 447 (1992).
- [62] H. Huber, F. Weber und M. K. Weigel  
*Relativistic calculations of neutron star matter*,  
Nucl. Phys. **A569**, 684 (1996).
- [63] F. Hofmann, C .M. Keil, H. Lenske,  
*Density Dependent Hadron Field Theory for Asymmetric Nuclear Matter and Exotic Nuclei*,  
nucl-th/0007050.
- [64] F. Hofmann,  
*Kernstrukturrechnungen mit dichteabhängigen Wechselwirkungen*,  
Diplomarbeit, Gießen, 1996.
- [65] D. J. Rowe,  
*Nuclear Collective Motion*,  
(Methuen and Co. Ltd. , London, 1970).
- [66] N. N. Bogolyubov und J. G. Valatin,  
*Generalized Hartree-Fock Method*,  
Phys. Rev. **122**, 1012 (1961).

- [67] J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer,  
*Theory of Superconductivity*,  
Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [68] D. Vautherin und D. M. Brink,  
*Hartree-Fock Calculations With Skyrme's Interaction. 1. Spherical Nuclei*,  
Phys. Rev. **C5**, 626 (1972).
- [69] J. Dobaczewski, H. Flocard und J. Treiner,  
*Hartree-Fock-Bogolybov Description of Nuclei Near the Neutron-Dripline*,  
Nucl. Phys. **A422**, 103 (1984).
- [70] H. Kutscharek und P. Ring,  
*Relativistic field theory of superfluidity in nuclei*,  
Z. Phys. **A339**, 23 (1990).
- [71] B. V. Carlson und D. Hirata,  
*A Dirac-Hartree-Bogoliubov approximation for finite nuclei*,  
RIKEN-AF-NP-303, 1 (1999), nucl-th/0006006.
- [72] J. Meng,  
*Pairing interaction in exotic nuclei: Finite range or zero range?*,  
Phys. Rev. **C57**, 1229 (1998).
- [73] O. C. Zienkiewicz,  
*The Finite Element Method*,  
(McGraw-Hill, London, 1977).
- [74] C. Grossmann und H. G. Roos,  
*Numerik partieller Differentialgleichungen*,  
(Teubner, Stuttgart, 1994).
- [75] L. A. Bronstein und K. A. Semendajev,  
*Handbuch der Mathematik*,  
(Harry Deutsch, Frankfurt, 1981).
- [76] W. Poeschl, D. Vretanar, A. Rummel und R. Ring,  
*Application of finite element methods in relativistic mean-field theory: spherical nucleus*,  
Comput. Phys. Commun. **101**, 75 (1997).
- [77] W. Poeschl, D. Vretanar und R. Ring,  
*Relativistic Hartree-Bogoliubov theory in coordinate space: finite element solution for a nuclear system with spherical symmetry*,  
Comput. Phys. Commun. **101**, 75 (1997).
- [78] G. Audi, A. H. Wapstra,  
*The 1993 Atomic Mass Evaluation*,  
Nucl. Phys. **A565**, 1 (1993).

- [79] M. Chartier *et al.*,  
*Mass measurement of  $^{100}\text{Sn}$ ,*  
Phys. Rev. Lett. **77**, 2400 (1996).
- [80] B. Blank *et al.*,  
*On the discovery of doubly-magic  $^{48}\text{Ni}$ ,*  
Phys. Rev. Lett. **84**, 1116 (2000).
- [81] B. A. Brown,  
*New Skyrme interaction for normal and exotic nuclei,*  
Phys. Rev. **C58**, 220 (1998).
- [82] G. Fricke *et. al.*,  
*Nuclear Ground State Charge Radii from Electromagnetic Interactions ,*  
At. Data. Nucl. Data Tables **60**, 177 (1995).
- [83] G. A. Lalazissis, J. König und P. Ring,  
*A New Parameterization for the Lagrangian Density of Relativistic Mean Field Theory,*  
Phys. Rev. **C55**, 540 (1997).
- [84] M. Lopez-Quelle, N. Van Giai, S. Marcos und L. N. Savushkin,  
*Spin-orbit splitting in nonrelativistic and relativistic self-consistent models,*  
Phys. Rev. **C61**, 064321 (2000).
- [85] M. M. Sharma, G. A. Lalazissis und P. Ring,  
*Rho meson coupling in the relativistic mean field theory and description of exotic nuclei*  
Phys. Lett. **B312**, 377 (1993).
- [86] Y. Sugahara, H. Toki,  
*Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear  $\sigma$  and  $\omega$  terms,*  
Nucl. Phys. **A579**, 557 (1994).
- [87] M. M. Sharma, A. R. Farhan und S. Mythili,  
*Shell effects in nuclei with vector self-coupling of omega meson in relativistic Hartree-Bogoliubov theory,*  
Phys. Rev. **C61**, 054306 (2000).
- [88] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, T. R. Werner, J. F. Berger, C. R. Chinn and J. Decharge  
*Mean-field description of ground-state properties of drip-line nuclei: Pairing and continuum effects,*  
Phys. Rev. **C53**, 2809 (1996).
- [89] H. Frauenfelder und E. M. Henley,  
*Subatomic Physics,*  
(Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974).

- [90] N. K. Glendenning,  
*The Hyperon Composition Of Neutron Stars*,  
Phys. Lett. **B114**, 392 (1982).
- [91] N. K. Glendenning,  
*Role Of Hyperons And Pions In Neutron Stars And Supernovae*,  
Z. Phys. **A327**, 295 (1987).
- [92] N. K. Glendenning,  
*Compact Stars*,  
(Springer-Verlag, New York, 1997).
- [93] F. Weber und M. K. Weigel,  
*Equation of state of dense of dense baryonic matter*,  
J. Phys. **G15**, 765 (1989).
- [94] R. Knorren, M. Prakash und P. J. Ellis,  
*Strangeness in hadronic stellar matter*,  
Phys. Rev. **C52**, 3470 (1995).
- [95] J. Schaffner und I. N. Mishustin,  
*Hyperon rich matter in neutron stars*,  
Phys. Rev. **C53**, 1416 (1996).
- [96] M. Rufa, H. Stoecker, P. G. Reinhard, J. Maruhn und W. Greiner,  
*Single-particle spectra of  $\Lambda$  hypernuclei and the enhanced interaction radii of multi-strange objects*  
J. Phys. **G13**, L143 (1987).
- [97] J. Mares und J. Zofka,  
*On  $\Lambda$ -Hyperons in the Nuclear Medium*  
Z. Phys. **A333**, 209 (1989).
- [98] M. Rufa, J. Schaffner, J. Maruhn, H. Stoecker, W. Greiner und P. G. Reinhard,  
*Multi - Lambda Hypernuclei And The Equation Of State Of Hypermatter*,  
Phys. Rev. **C42**, 2469 (1990).
- [99] N. K. Glendenning, D. Von-Eiff, M. Haft, H. Lenske und M. K. Weigel,  
*Relativistic mean field calculations of Lambda and Sigma hypernuclei*,  
Phys. Rev. **C48**, 889 (1993).
- [100] D. Vretenar, W. Poschl, G. A. Lalazissis und P. Ring,  
*Relativistic mean-field description of light Lambda hypernuclei with large neutron excess*,  
Phys. Rev. **C57**, 1060 (1998).
- [101] J. Schaffner, C. B. Dover, A. Gal, C. Greiner, D. J. Millener und H. Stocker,  
*Multiply strange nuclear systems*,  
Annals Phys. **235**, 35 (1994).

- [102] F. Hofmann, C. M. Keil, H. Lenske,  
*Application of the Density Dependent Hadron Field Theory to Neutron Star Matter*,  
nucl-th/0008xxxx.
- [103] T. A. Rijken, V. G. Stoks und Y. Yamamoto,  
*Soft-core hyperon nucleon potentials*,  
Phys. Rev. **C59**, 21 (1999).
- [104] V. G. Stoks und T. A. Rijken,  
*Soft-core baryon baryon potentials for the complete baryon octet*,  
Phys. Rev. **C59**, 3009 (1999).
- [105] H. J. Schulze, M. Baldo, U. Lombardo, J. Cugnon und A. Lejeune,  
*Hyperonic nuclear matter in Brueckner theory*,  
Phys. Rev. **C57**, 704 (1998).
- [106] V. G. Stoks und T. S. Lee,  
*Strange hadron matter and  $SU(3)$  symmetry*,  
Phys. Rev. **C60**, 024006 (1999).
- [107] I. Vidana, A. Polls, A. Ramos, M. Hjorth-Jensen und V. G. Stoks,  
*Strange nuclear matter within Brueckner-Hartree-Fock theory*,  
Phys. Rev. **C61**, 025802 (2000).
- [108] C. B. Dover und A. Gal,  
*Hyperon Nucleus Potentials*,  
Prog. Part. Nucl. Phys. **12**, 171 (1985).
- [109] D. J. Millener, C. B. Dover und A. Gal,  
*Lambda Nucleus Single Particle Potentials*,  
Phys. Rev. **C38**, 2700 (1988).
- [110] C. B. Dover, D. J. Millener und A. Gal,  
*On The Production And Spectroscopy Of Sigma Hypernuclei*,  
Phys. Rept. **184**, 1 (1989).
- [111] C. J. Batty, E. Friedman und A. Gal,  
*Density dependence in Sigma- atoms and implications for Sigma hypernuclei*,  
Prog. Theor. Phys. Suppl. **117**, 227 (1994).
- [112] J. Mares, E. Friedman, A. Gal und B. K. Jennings,  
*Constraints on Sigma nucleus dynamics from Dirac phenomenology of Sigma-atoms*,  
Nucl. Phys. **A594**, 311 (1995).
- [113] C. B. Dover und A. Gal,  
*Xi Hypernuclei*,  
Annals Phys. **146**, 309 (1983).



- [114] J. Schaffner-Bielich und A. Gal,  
*Properties of strange hadronic matter in bulk and in finite systems*,  
nucl-th/0005060.
- [115] A. Reuber, K. Holinde, H. C. Kim und J. Speth,  
*Correlated  $\pi\pi$  and  $K\bar{K}$  exchange in the baryon-baryon interaction*,  
Nucl. Phys. **A608**, 243 (1996).
- [116] J. Haidenbauer, W. Melnitchouk und J. Speth,  
*Meson-exchange model for the  $Y N$  interaction*,  
Proceedings of SENDAI 98, nucl-th/9805014.
- [117] Z. Ma, J. Speth, S. Krewald, B. Chen und A. Reuber,  
*Hypernuclei with meson exchange hyperon nucleon interactions*,  
Nucl. Phys. **A608**, 305 (1996).
- [118] S. Balberg und A. Gal,  
*An effective equation of state for dense matter with strangeness*,  
Nucl. Phys. **A625**, 435 (1997).
- [119] M. Baldo, G. F. Burgio, H. J. Schulze,  
*Hyperon stars in the Brueckner-Bethe-Goldstone theory*,  
Phys. Rev. **C61**, 055801 (2000).
- [120] I. Vidana, A. Polls, A. Ramos, L. Engvik und M. Hjorth-Jensen,  
*Hyperon hyperon interactions and properties of neutron star matter*,  
nucl-th/0004031.
- [121] H. Muether, M. Prakash und T. L. Ainsworth,  
*The nuclear symmetry energy in relativistic Brueckner-Hartree-Fock calculations*,  
Phys. Lett. **199**, 469 (1987).
- [122] F. Weber und M. K. Weigel,  
*Baryon Composition And Macroscopic Properties Of Neutron Stars*,  
Nucl. Phys. **A505**, 779 (1989).
- [123] H. Huber, F. Weber, M. K. Weigel und C. Schaab,  
*Neutron star properties with relativistic equations of state*,  
Int. J. Mod. Phys. **E7**, 301 (1998).
- [124] H. Hanauske, D. Zschesche, S. Pal, S. Schramm, H. Stocker und W. Greiner,  
*Neutron Star Properties in a chiral  $SU(3)$  model*,  
Astrophys. J. **537**, 50320 (2000).
- [125] S. Pal, M. Hanauske, I. Zakout, H. Stocker und W. Greiner,  
*Neutron star properties in the quark meson coupling model*,  
Phys. Rev. **C60**, 015802 (1999).

- [126] S. L. Shapiro und S. A. Teukolsky,  
*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*,  
(John Wiley & Sons, New York, 1983).
- [127] J. M. Lattimer und M. Prakash,  
*Nuclear Matter and its Role in Supernovae, Neutron Stars and Compact Object  
Binary Mergers*,  
Phys. Rept. **333-334**, 121 (2000).
- [128] K. Schertler,  
*Quarkphasen in Neutronensternen und die Dritte Familie kompakter Sterne*,  
Dissertationsarbeit, Gießen, 1999.
- [129] J. R. Oppenheimer und G. M. Volkoff,  
*On Massive Neutron Cores*,  
Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [130] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler,  
*Gravitation*,  
(W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- [131] G. Baym, C. Pethick und P. Sutherland,  
*The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models*  
Astrophys. J. **170**, 299 (1971).
- [132] J. Negele und D. Vautherin,  
*Neutron star matter at subnuclear densities*,  
Nucl. Phys. **A207**, 298 (1973).
- [133] D. B. Kaplan und A. E. Nelson,  
*Strange goings on in dense nucleonic matter*  
Phys. Lett. **B175**, 57 (1986).
- [134] G. E. Brown, C.-H. Lee, M. Rho und V. Thorsson,  
*From kaon-nuclear interactions to kaon kondensation*  
Nucl. Phys. **A567**, 937 (1994).
- [135] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn und V. F. Weisskopf,  
*New extended model of hadrons*  
Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [136] K. Schertler, C. Greiner, J. Schaffner-Bielich und M. H. Thoma,  
*Quark phases in neutron stars and a 'third family' of compact stars as a signature  
for phase transitions*,  
astro-ph/0001467.
- [137] A. Akmal, V. R. Pandharipande und D. G. Ravenhall,  
*Equation of state of nucleon matter and neutron star structure*,  
Phys. Rev. **C58**, 1804 (1998).

- [138] H. Huber,  
*Relativistische Zustandsgleichungen und Neutronensterne*,  
Dissertationsarbeit, München, 1999.
- [139] N. K. Glendenning und S. A. Moszkowski,  
*Reconciliation of neutron star masses and binding of the lambda in hypernuclei*,  
Phys. Rev. Lett. **67**, 2414 (1991).
- [140] H. Huber, M. K. Weigel und F. Weber,  
*Compatibility of neutron star masses and hyperon coupling constants*,  
Z. Naturforsch. **54A**, 77 (1999).
- [141] A. deShalit und H. Feshbach,  
*Theoretical Nuclear Physics Volume I: Nuclear Structure*,  
(John Wiley & Sons, Inc., 1974).



# Danksagung

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Horst Lenske für seine ausgezeichnete Betreuung und die angenehme Arbeitsatmosphäre. Sein Interesse, seine Anregungen und ständige Diskussionsbereitschaft waren für das Entstehen dieser Arbeit von entscheidender Bedeutung.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik und die dort herrschenden hervorragenden Arbeitsbedingungen.

Meinem Mitstreiter Christoph M. Keil danke ich für zahlreiche produktive Diskussionen, sein offenes Ohr für Fragen aller Art und das Korrekturlesen meines Manuskriptes.

Dr. Klaus Schertler danke ich für seine Anregung, doch auch einmal Neutronensterne zu untersuchen, und die Bereitstellung des Codes zum Lösen der TOV-Gleichung. Auch cand. PD Dr. habil. Carsten Greiner sei Dank für seine Unterstützung auf dem Gebiet der Strangeness-Physik.

Allen Mitgliedern des Institutes danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und interessante physikalische und weniger physikalische Diskussionen. Die gute Stimmung am Institut hat mir das Arbeiten sehr erleichtert. Dazu trug übrigens auch der am frühen Morgen bereitstehende Kaffee entscheidend bei.

Weiterhin möchte ich allen danken, die für die technische und administrative Unterstützung verantwortlich waren: dem für die Betreuung der Computer zuständigen Team, Christiane Pausch für das Besorgen von Literatur und Elke Jung für ihre Hilfe beim Kampf mit Reisekosten, Formularen und sonstigen organisatorischen Dingen.

Ein ganz besonderer Dank gebührt meinen Eltern für den Rückhalt und die Unterstützung während der gesamten Zeit meines Studiums und meiner Promotion.

Abschließend gilt mein Dank meiner Frau Masami für ihre Begeisterung über die interessanten „Bildchen“ in meiner Arbeit. Ich danke ihr auch dafür, dass sie mich insbesondere während der Fertigstellung der Arbeit so lange ertragen und immer wieder daran erinnert hat, dass es im Leben auch nicht-physikalische Dinge gibt.